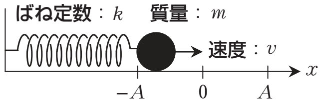
●水平ばね振り子のエネルギー保存則

滑らかな水平面上で運動するばね振り子では，ばねにつけられているおもりの運動エネルギーとばねの弾性力による位置エネルギーの和は保存される。そのことを導出してみよう。

右図のように振幅 A で単振動するおもりの運動エネルギーを K，ばねの弾性力による位置エネルギーを U とすると，



$$K+U=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2 \cdots①$$

ここで時刻 t におけるおもりの変位 x と速度 v は，次のように表すことができる。

$x=A\sin(\omega t+\theta)$，$v=A\omega\cos(\omega t+\theta)$　（ω は角振動数，θ は定数）

これを①式に代入すると，$K+U=\frac{1}{2}\underline{m}A^2\underline{\omega^2}\cos^2(\omega t+\theta)+\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\theta)$

一方，運動方程式 $m(-\omega^2 x)=-kx$ より $m\omega^2=k$ となり，下線部分を k に置き換えると，

$$K+U=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\theta)+\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\theta)$$

$$=\frac{1}{2}kA^2\{\cos^2(\omega t+\theta)+\sin^2(\omega t+\theta)\}\quad\rightarrow\ \cos^2(\omega t+\theta)+\sin^2(\omega t+\theta)=1$$

$=\frac{1}{2}kA^2=$ 一定　→ k はばね定数，A は振幅であるので，$K+U$ は一定となる。

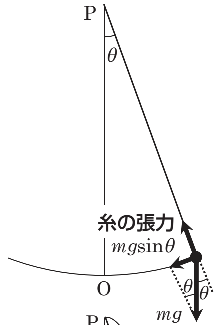
※$\frac{1}{2}kA^2$ はばねの伸び縮みが最大のときのばねの弾性力による位置エネルギーを表している。

つまり，運動エネルギーが 0 で弾性力による位置エネルギーが最大のときのエネルギーを表している。

●単振り子の周期

振れ幅の小さい糸振り子は単振動をする。単振動をする振り子のことを**単振り子**という。振り子の支点を P，糸の長さを L，おもりの質量を m，重力加速度の大きさを g とし，さらに糸と鉛直線の成す角を θ とすると，おもりにはたらく重力の，円軌道の接線方向の大きさは $mg\sin\theta$ となる。θ が小さいとき，この接線方向の力の向きは水平方向と見なせる。つまり，この力は水平方向の**復元力**（振動の中心に戻そうとする力）と見なせる。

ここで，右下図のように，線分 OP からおもりまでの距離を x，角振動数を ω として，水平方向の単振動の運動方程式を立てると，



$m(-\omega^2 x)=-mg\sin\theta\cdots②$　（水平右向きを正とする）

図形的に $\sin\theta=\frac{x}{L}$ であるので，これを②式に代入して，

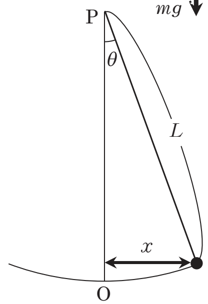
$m(-\omega^2 x)=-\frac{mg}{L}x$　両辺を $-mx$ で割ると，

$\omega^2=\frac{g}{L}$ となるので，$\omega=\sqrt{\frac{g}{L}}$

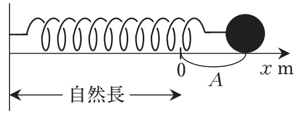
よって，周期は $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

暗記

周期：$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$



265 図のように，滑らかな水平面上に，ばね定数 k N/m のばねの一端を固定し，他端に質量 m kg のおもりを取りつけ，滑らかな水平面上でおもりを自然長から A m だけ伸ばし，静かに放して振動をさせる。ばねの長さが自然長のときのおもりの位置を原点として，x 軸を水平右向きにとるとき，次の問いに答えなさい。



(1) 周期 T s と角振動数 ω rad/s をそれぞれ k, m, π を用いて表しなさい。

$T=($　　　　　$)$ s　$\omega=($　　　　　$)$ rad/s

(2) 時刻 $t=0$ で引き伸ばしたおもりを放したとして，時刻 t s でのおもりの変位を，$x=A\sin(\omega t+\theta)$ と表すとき，θ rad $\left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ の値を求めなさい。

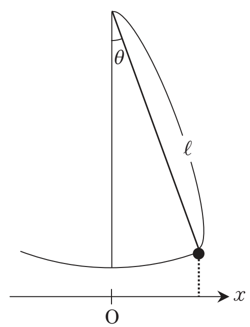
$\theta=($　　　　　$)$ rad

(3) (1)の x m と，おもりの速度 v m/s を A, k, m, t, π を用いて表しなさい。ただし，T, ω, θ は用いないこと。

$x=($　　　　　$)$ m　$v=($　　　　　$)$ m/s

(4) (3)の結果を利用して，$E=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2$ が一定となることを導きなさい。

266 質量 m kg のおもりを長さ ℓ m の糸の一端に取り付け，天井から吊るした。おもりを鉛直方向から右側へわずかに傾け，静かに放したところ，おもりは単振動をした。おもりが最下点にくる点を原点として，水平右向きに x 軸をとり，重力加速度の大きさを g m/s² として，次の問いに答えなさい。



(1) 糸が鉛直方向から右側へ θ rad だけ傾いているとき，次の①〜③の問いに答えなさい。

① おもりが糸と垂直な方向に受ける力 F N を m, g, θ を用いて表しなさい。

② おもりの変位 x m を ℓ, θ で表しなさい。

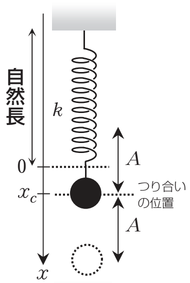
③ F を m, g, ℓ, x を用いて表しなさい。

$F=($　　　　　$)$ N　$x=($　　　　　$)$ m　$F=($　　　　　$)$ N

(2) 水平方向の運動方程式を立てることによって，この単振動の周期 T s を g, ℓ, π を用いて表しなさい。

$T=($　　　　　$)$ s

●鉛直ばね振り子



鉛直方向に単振動するばね振り子を考える。左図のように，ばね定数 k のばねが自然長になるときのばねの下端を原点として，鉛直下向きに x 軸をとる。鉛直に吊るしたばねの下端に質量 m のおもりを静かにとりつける。ばねは自然長より x_c だけ伸びたとして，つり合いの式を立てると，

$mg = kx_c$ より，$x_c = \dfrac{mg}{k}$ …①

さらにおもりを A だけ引き下げ，静かに放すと，おもりはつり合いの位置（$x = x_c$）を中心に振幅 A で単振動する。このことから時刻 t におけるおもりの変位 x，速度 v，加速度 a は，次のように表すことができる。

$$x = x_c + A\sin(\omega t + \theta) \ \cdots ② \qquad v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \theta) \ \cdots ③$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\sin(\omega t + \theta) \ \cdots ④ \quad (\omega：角振動数, \theta：定数)$$

②,④より $A\sin(\omega t + \theta)$ を消去すると，$\boldsymbol{a = -\omega^2(x - x_c)}$

よっておもりの運動方程式は次のように表すことができる。

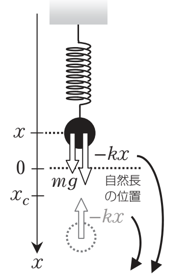
$m\{-\omega^2(x - x_c)\} = -kx + mg$　※下向きが正であることに注意

さらに①式より，x_c を消去して両辺を整理すると，

$-m\omega^2\left(x - \dfrac{mg}{k}\right) = -k\left(x - \dfrac{mg}{k}\right)$　両辺を $-\left(x - \dfrac{mg}{k}\right)$ で割ると

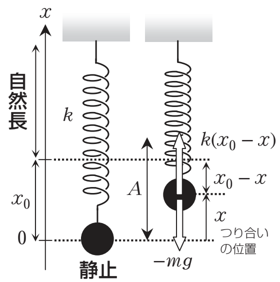
$m\omega^2 = k$　よって，$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

周期を T とすると，$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$



暗記
周期：$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

$x>0$，$x<0$ のどちらの場合でも弾性力は $-kx$ とマイナスがつく形で矛盾しないことを理解しよう。



軸のとり方で式が変わるので注意しよう。左図のように，ばねは自然長から x_0 伸びて，おもりが静止してつり合っていたとする。このつり合いの位置を原点として，鉛直上向きに x 軸をとると，つり合いの式は，

$mg = kx_0$ …①′

さらに，振幅 A でおもりを単振動させると，

変位：$x = A\sin(\omega t + \theta)$ …②′

速度：$v = A\omega\cos(\omega t + \theta)$ …③′

加速度：$a = -A\omega^2\sin(\omega t + \theta)$ …④′

②′，④′より，$A\sin(\omega t + \theta)$ を消去すると，

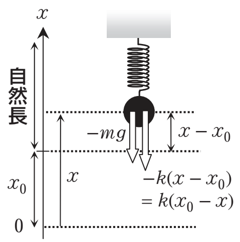
$\boldsymbol{a = -\omega^2 x}$ となるので，運動方程式は

$m(-\omega^2 x) = k(x_0 - x) - mg$ →左図を参照

①′より，mg を消去して整理すると　$m(-\omega^2 x) = -kx$

よって，$m\omega^2 = k$　これを ω について解くと，

$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ となり，周期は，$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$



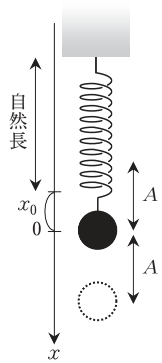
※自然長より短い場合でも式は変わらないことを理解しよう！

暗記
振動の中心を原点にすると，加速度は $a = -\omega^2 x$
振動の中心を $x = x_c$ にすると，加速度は $a = -\omega^2(x - x_c)$
※軸を上向きにとっても下向きにとっても式は同じ！

●復元力と弾性力の違い

復元力は「振動の中心方向にはたらく力」であり，弾性力は「伸び縮みする物体が自然長に戻ろうとする向きにはたらく力」である。摩擦が無視できる水平ばね振り子の場合，自然長での振り子の位置と振動の中心が一致するため，復元力は弾性力と一致する。一方鉛直ばね振り子の場合，振動の中心は自然長での振り子の位置より下側に来るため，復元力は弾性力と一致せず，振り子にはたらく重力と弾性力の合力に一致する。

267 ばね定数 k N/m のばねを天井に吊るし，下端に質量 m kg の物体を静かに吊るすと，ばねは自然長から x_0 m ($x_0 > 0$) だけ伸びた。重力加速度の大きさを g m/s² とし，物体が静止している位置を原点として，鉛直下向きに x 軸をとるとき，次の問いに答えなさい。



(1) x_0 を m と k を用いて表しなさい。$x_0 =$ (　　　　　　　) m

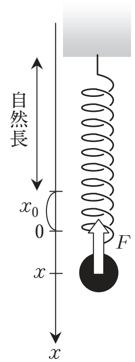
原点で静止している物体を A m ($A > 0$) 引き伸ばして静かに放すと，物体は角振動数 ω rad/s ($\omega > 0$) で単振動した。

(2) 単振動している物体が原点を下向きに通過するときの時刻を $t = 0$ とする。時刻 t s での物体の変位 x m，速度 v m/s，加速度 a m/s² を求めなさい。

$x =$ (　　　　　　　) m　$v =$ (　　　　　　　) m/s

$a =$ (　　　　　　　) m/s²

(3) (2)の結果より，加速度 a を ω と x だけで表しなさい。$a =$ (　　　　　)



(4) おもりの変位が x のときのおもりがばねから受ける力 F N を k，x_0，x だけで表しなさい。ただし F は鉛直下向きを正とする。

$F =$ (　　　　　　　) N

(5) 運動方程式を立てることによって，ω を k と m だけで表しなさい。

$\omega =$ (　　　　　) rad/s

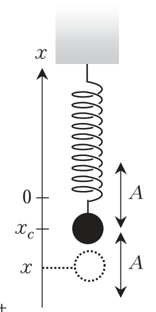
(6) (1),(5)の結果より，この振動の周期 T s を π, m, k だけで表しなさい。

$T =$ (　　　　　) s

●鉛直ばね振り子のエネルギー保存則

鉛直に運動するばね振り子では，力学的エネルギー（おもりの運動エネルギーとばねの弾性力による位置エネルギーとおもりの重力による位置エネルギーの和）は保存される。そのことを導出してみよう。

右図のように，自然長のばねの下端を原点として，鉛直上向きに x 軸をとる。ばね定数を k，おもりの質量を m，重力加速度の大きさを g，おもりが静止してつり合っているときのおもりの変位を $x = x_c\ (x_c < 0)$ とする。



つり合いの式は　$mg = -kx_c$ …①′　　よって，$x_c = -\dfrac{mg}{k}$ …①

おもりが振幅 A で単振動しているとき，時刻 $t = 0$ でおもりの変位が $x = x_c$ であるとすると，時刻 t でのおもりの変位 x，速度 v，加速度 a は角振動数 ω を用いて次のように表すことができる。

$x = x_c + A\sin\omega t$ …②　　$v = A\omega\cos\omega t$ …③　　$a = -A\omega^2\sin\omega t$ …④

②,④より $A\sin\omega t$ を消去すると $a = -\omega^2(x - x_c)$ となり，おもりの運動方程式は
$m\{-\omega^2(x - x_c)\} = -kx - mg$　と表される。
さらに①式より，x_c を消去して両辺を整理すると，

$-m\omega^2\left(x + \dfrac{mg}{k}\right) = -k\left(x + \dfrac{mg}{k}\right)$　　両辺を $-\left(x + \dfrac{mg}{k}\right)$ で割ると，$m\omega^2 = k$ …⑤

おもりの運動エネルギーとばねの弾性力による位置エネルギーとおもりの重力による位置エネルギーの和を E とし，重力による位置エネルギーの基準を原点にすると，

$E = \dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}kx^2 + mgx$ …⑥　となる。②,③より x, v を消去すると，

$$E = \frac{1}{2}\underline{m}A^2\underline{\omega^2}\cos^2\omega t + \frac{1}{2}k(x_c + A\sin\omega t)^2 + \underline{mg}(x_c + A\sin\omega t)$$

⑤式の $k = m\omega^2$　①′式の $mg = -kx_c$　より，上式の下線部を置き換えると，

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t + \frac{1}{2}k(x_c + A\sin\omega t)^2 - kx_c(x_c + A\sin\omega t)\\
&= \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t + \frac{1}{2}k(x_c^2 + 2x_cA\sin\omega t + A^2\sin^2\omega t) - kx_c(x_c + A\sin\omega t)\\
&= \frac{1}{2}kA^2(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t) + \frac{1}{2}kx_c^2 + kx_cA\sin\omega t - kx_c^2 - kx_cA\sin\omega t\\
&= \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx_c^2 = 一定 \ \cdots⑦
\end{aligned}$$

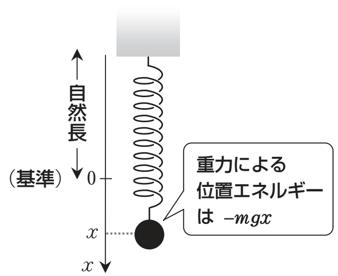
（k, A, x_c は定数であるため一定となる）

よって，力学的エネルギーは保存される。

!注意　鉛直下向きを正として，重力による位置エネルギーの基準をばねの自然長の位置（原点）とすると，

力学的エネルギー $= \dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}kx^2 - mgx$

軸の向きで重力による位置エネルギーの式が変わってくるので注意しよう。



また，⑥,⑦より，$\dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}kx^2 + mgx = \dfrac{1}{2}kA^2 - \dfrac{1}{2}kx_c^2$　が成り立つ。

この式をさらに変形してみる。

$\dfrac{1}{2}kx_c^2$ を左辺に移項すると，

$\dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}kx^2 + mgx + \dfrac{1}{2}kx_c^2 = \dfrac{1}{2}kA^2$

①′の $mg = -kx_c$ より mg を $-kx_c$

に置き換えて，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 - kx_cx + \frac{1}{2}kx_c^2 = \frac{1}{2}kA^2\\
&\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(x^2 - 2x_cx + x_c^2) = \frac{1}{2}kA^2\\
&\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(x - x_c)^2 = \frac{1}{2}kA^2
\end{aligned}$$

暗記

●水平方向のばね振り子のエネルギー保存則

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = 一定$$

x：振動の中心からの変位
　　＝自然長の位置からの変位

●鉛直方向のばね振り子のエネルギー保存則

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kX^2 = 一定$$

X：振動の中心からの変位
　　≠自然長の位置からの変位

※ $x - x_c$ は振動の中心からの変位を表しているので，この式は水平方向のばね振子のエネルギー保存則の式と対応していることがわかる。

268　質量 m kg の物体をばね定数 k N/m のばねにつなぎ，天井に吊るした。重力加速度の大きさを g m/s² として，次の問いに答えなさい。

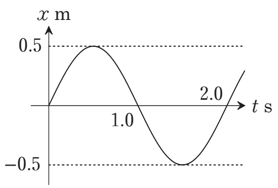
(1) 物体が静止して，物体にはたらく力がつり合っているとき，ばねの自然長からの伸びを求めなさい。
（　　　　　　）m

物体が静止している状態から，さらにばねを A m 伸ばして静かに放すと，物体は単振動した。

(2) つり合いの位置を通過するときの，物体の速さを求めなさい。　（　　　　　　）m/s

(3) ばねが自然長になるときの，物体の速さを求めなさい。　（　　　　　　）m/s

例題 1　右図は，単振動する物体の振動の中心からの変位 x と時刻 t の関係を表したグラフである。次の問いに答えなさい。

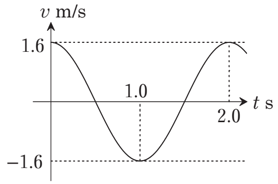


(1) この単振動の振幅 A，周期 T，角振動数 ω をそれぞれ求めなさい。ただし，π は小数に直し，有効数字は 2 桁で答えること。

振幅と周期はグラフの目盛から読み取る。

振幅：$A = \mathbf{0.50\ m}$ …(答)　　周期：$T = \mathbf{2.0\ s}$ …(答)

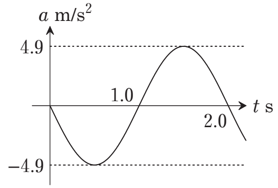
角振動数：$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{2.0} = \pi \fallingdotseq \mathbf{3.1\ rad/s}$ …(答)



(2) このグラフの変位 x を t と π の式で表しなさい。

グラフは原点を通り，原点から増加していることに注意すると，(1)から $\omega = \pi$ より，$x = \mathbf{0.50\sin\pi t}$ …(答)

(3) この物体の速度 v と時刻 t の関係，および加速度 a と時刻 t の関係を求め，それらのグラフも書きなさい。

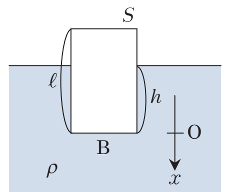


(2)の式から，v，a は以下になり，グラフは右のようになる。

$v = \dfrac{dx}{dt} = 0.5\pi\cos\pi t \fallingdotseq \mathbf{1.6\cos\pi t}$ …(答)

$a = \dfrac{d^2x}{dt^2} = -0.5\pi^2\sin\pi t \fallingdotseq \mathbf{-4.9\sin\pi t}$ …(答)

例題 2　長さ ℓ m，断面積 S m² の直方体の木片を，密度 ρ kg/m³ の水に浮かべたら，h m の深さで静止した。さらに木片を少し押して放すと木片は単振動を始めた。重力加速度の大きさを g m/s²，水の抵抗はないものとして，次の問いに答えなさい。



(1) 木片の密度 ρ_1 kg/m³ を求めなさい。

静止状態では，重力と浮力がつり合っていることから式を考える。木片の質量を m kg とすると，$\rho_1 = \dfrac{m}{S\ell}$　となり，

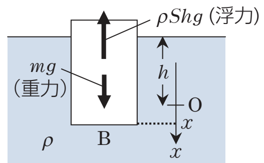
$m = \rho_1 S\ell$　よって物体にはたらく重力 $mg = \rho_1 S\ell g$ …①

静止状態のときの水面下の木片の体積を V m³ とすると，

浮力　$\rho Vg = \rho Shg$ …②

①,②より，$\rho_1 S\ell g$ (重力) $= \rho Shg$ (浮力) …③

よって，$\rho_1 = \dfrac{\rho Shg}{S\ell g} = \dfrac{\boldsymbol{\rho h}}{\boldsymbol{\ell}}$ …(答)



(2) 静止状態での木片の底 B の位置を原点として鉛直下向きに x 軸をとる。振動中に底 B が位置 x に達したときの鉛直方向の合力 F（x 軸の向きを正）を求めなさい。

③より，重力 $= \rho Shg$，右上図より，浮力 $= \rho S(h + x)g$

F = 重力 − 浮力 $= \rho hSg - \rho S(h + x)g = \boldsymbol{-\rho Sgx}$ …(答)

復習
浮力 $F = \rho Vg$
流体の密度 × 体積 × 重力加速度

(3) 振動の周期 T を求めなさい。

単振動であるので，角振動数を ω として運動方程式を立てると，(2)より，

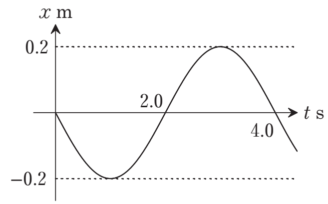
$m(-\omega^2 x) = -\rho Sgx$ …(※) よって，$\omega = \sqrt{\dfrac{\rho Sg}{m}}$ …③

(1)より，$m = \rho_1 S\ell = \dfrac{\rho h}{\ell}\cdot S\ell = \rho Sh$ …④　③,④より，

$\omega = \sqrt{\dfrac{\rho Sg}{\rho Sh}} = \sqrt{\dfrac{g}{h}}$　よって，$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{h}{g}}$ …(答)

【別解】 この振動がばね定数 k のばねによる振動と見なすと，
(※)より，$-\rho Sgx = -kx$
よって，$k = \rho Sg$ となるので，
$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\rho Sh}{\rho Sg}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{h}{g}}$

269　右図は，単振動する物体の振動の中心からの変位 x と時刻 t の関係を表したグラフである。次の問いに答えなさい。



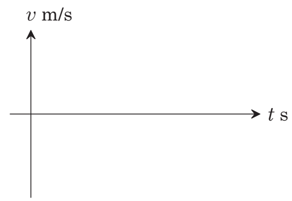
(1) この単振動の振幅 A，周期 T，角振動数 ω をそれぞれ有効数字は 2 桁で求めなさい。

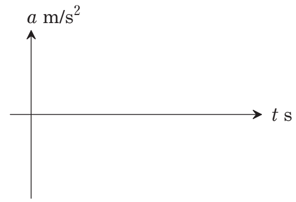
(2) このグラフの変位 x を t と π の式で表しなさい。

(3) この物体の速度 v と時刻 t の関係，および加速度 a と時刻 t の関係を示すグラフを書きなさい。ただし目盛りは有効数字 2 桁で記入すること。

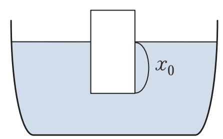
(1) A：(　　　　) m　T：(　　　　) s　ω：(　　　　) rad/s　　(2) x = (　　　　　　　　)

(3)





270　質量 M kg，断面積 S m² の円柱状の物体が，図のように液体中に浮いた状態で静止している。重力加速度の大きさを g m/s² として次の問いに答えなさい。



(1) 物体の液体中に沈んでいる部分の長さを x_0 m とすると，液体の密度 ρ kg/m³ はいくらか。　　ρ = (　　　　　　)

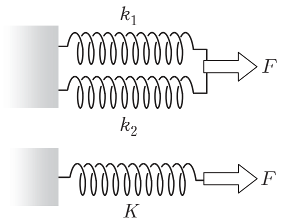
(2) 図の状態から物体を引き上げ，静かに放すと単振動をした。この単振動の周期 T s を求めなさい。

T = (　　　　　　)

●合成ばね定数

並列や直列につながれた複数のばねを 1 つのばねと見なすとき，その 1 つのばねのばね定数を**合成ばね定数**という。

●ばね定数 k_1, k_2 のばねを並列につなぐ場合



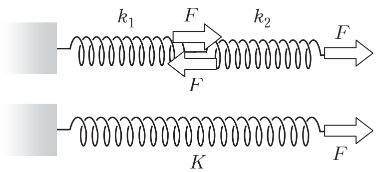
左図のように，並列につながれたばねを力 F で水平方向に引っ張るとすると，2 つのばねは同じ長さだけ伸びるので，その長さを x とすると，$F = k_1x + k_2x$ …①

一方，合成ばね定数を K とすると，合成した 1 つのばねも F で引っ張ると x だけ伸びるので，$F = Kx$ …②

①,②より F を消去すると，$Kx = k_1x + k_2x$

両辺を x で割ると，$\boldsymbol{K = k_1 + k_2}$　となる。

●ばね定数 k_1, k_2 のばねを直列につなぐ場合



左図のように，直列につながれたばねを，水平方向に力 F で引っぱるとする。k_2 のばねを右向きに力 F で引っ張り，静止させると，ばねにはたらく力はつり合うので，k_2 のばねは，k_1 のばねから同じ大きさの力 F を左向きに受けることになる。このとき，作用・反作用の法則によって，k_1 のばねには，同じ大きさの力 F が右向きにはたらくことになる。つまり，2 つのばねには，どちらも同じ力 F が作用することになる。

よって，直列につないだばねに力 F を作用させたときの，k_1 のばねの伸びを x_1，k_2 のばねの伸びを x_2 とすると，次の式が成り立つ。

$F = k_1x_1 \;\rightarrow\; x_1 = \dfrac{F}{k_1}$ …①　$F = k_2x_2 \;\rightarrow\; x_2 = \dfrac{F}{k_2}$ …②　⟶

> ばね定数が異なるばねに同じ力が作用するわけだから，ばねの伸びは異なる！

一方，合成ばね定数を K とすると，合成した 1 つのばねは F で引っ張られると，$x_1 + x_2$ だけ伸びることになる。よってつり合いの式は，次のようになる。

$$F = K(x_1 + x_2) \;\rightarrow\; x_1 + x_2 = \frac{F}{K} \;\cdots③$$

①,②式を③式に代入すると，$\dfrac{F}{k_1} + \dfrac{F}{k_2} = \dfrac{F}{K}$　両辺を F で割ると，$\dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2} = \dfrac{1}{K}$

> **暗記**
>
> **合成ばね定数を K とするとき，**
>
> **並列の場合：**$K = k_1 + k_2$　**直列の場合：**$\dfrac{1}{K} = \dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}$

・ばね定数が k_1, k_2, k_3 のばねを並列につないだときの合成ばね定数 K_3 を求めてみる。

k_1, k_2 の合成ばね定数を K_2 とすると，$K_2 = k_1 + k_2$

K_2 と k_3 の合成ばね定数が K_3 であるので，$K_3 = K_2 + k_3 = k_1 + k_2 + k_3$

・ばね定数が k_1, k_2, k_3 のばねを直列につないだときの合成ばね定数 K_3 を求めてみる。

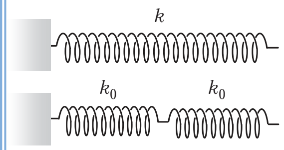
k_1, k_2 の合成ばね定数を K_2 とすると，$\dfrac{1}{K_2} = \dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}$

K_2 と k_3 の合成ばね定数が K_3 であるので，$\dfrac{1}{K_3} = \dfrac{1}{K_2} + \dfrac{1}{k_3} = \dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2} + \dfrac{1}{k_3}$

これらのことから，一般にばね定数が $k_1, k_2, k_3 \cdots k_n$ の n 本のばねを並列，直列につなぐときの合成ばね定数 K_n は，それぞれ次のようになることがわかる。

> **暗記**
>
> **並列：**$K_n = k_1 + k_2 + k_3 + \cdots + k_n$　**直列：**$\dfrac{1}{K_n} = \dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2} + \dfrac{1}{k_3} + \cdots + \dfrac{1}{k_n}$

例題 3　ばね定数 k のばねを半分に切ったとき，半分の長さになったばねのばね定数を求めなさい。

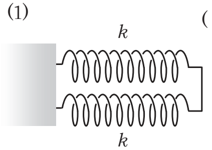


半分になったばねのばね定数を k_0 とすると，ばね定数 k_0 のばねを 2 本直列につないでできるばねの合成ばね定数が k であると見なすことができる。よって，

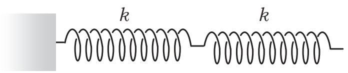
$\dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{k_0} + \dfrac{1}{k_0}$ となり，$\dfrac{1}{k} = \dfrac{2}{k_0}$　つまり，$k_0 = 2k$ …(答)

271　ばね定数 k のばねを次のようにつないだ場合の合成ばね定数を求めなさい。

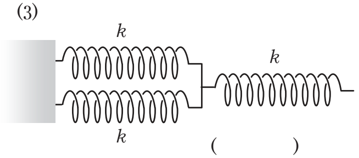
(1)　（　　　）



(2)　（　　　）



(3)



（　　　）

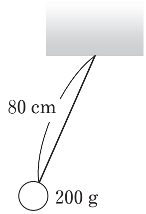
272　ばね定数 k のばねを 3 等分して，3 つを並列にするとき，全体としてのばね定数はいくらになるか。

（　　　）

★補充問題★

273 長さ 80 cm の糸に質量 200 g の物体を吊るして単振り子をつくった。この単振り子の周期は何秒になるか。ただし，重力加速度の大きさを $9.8\ \mathrm{m/s^2}$，$\pi = 3.14$ とし，有効数字 2 桁で答えること。

（　　　　　）s



274 ばね定数 k N/m のばねについて，次の問いに答えなさい。

(1) このばねに質量 m kg のおもりをつけて振動させるとき，振動の周期 T s を求めなさい。

T =（　　　　）s

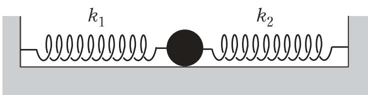
(2) このばねを半分に切って，質量 $2m$ kg のおもりをつけて振動させるとき，振動の周期は(1)の周期の何倍になるか。

（　　　）倍

(3) このばねを切って，元の長さの 3 分の 2 の長さにしたときのばね定数を求めなさい。

（　　　）N/m

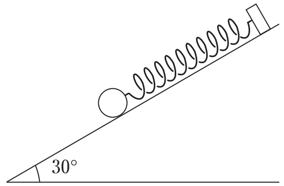
275 図のように滑らかな水平面上の質量 m kg の物体が，ばね定数がそれぞれ k_1 N/m, k_2 N/m のばねに結びつけられて静止している。最初はどちらのばねも自然長であったとする。外力を加え物体を右向きに距離 A m だけ移動させて静かに放すと物体は単振動をした。



(1) この単振動の周期を求めなさい。（　　　　　　）s

(2) 物体の速さの最大値を求めなさい。（　　　　　　）m/s

276 ばね定数 k N/m の軽いばねを右図のような滑らかな斜面上に置き，質量 m kg の小物体を吊るしたところ，ばねは x_0 m 伸びてつり合った。重力加速度の大きさを g m/s² として，次の問いに答えなさい。



(1) ばねの伸び x_0 を k, m, g を用いて表しなさい。

x_0 =（　　　　　）

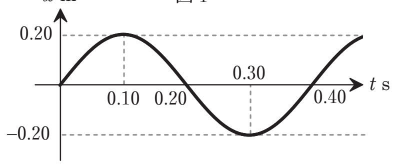
小物体を斜面下方に少し引き下げ，静かに手を放したところ，小物体は単振動を始めた。

(2) 単振動の周期 T s を k, m を用いて表しなさい。

T =（　　　　　　）

277 変位 x と時刻 t の関係が図 1 のように表される単振動がある。次の問いに答えなさい。

図 1

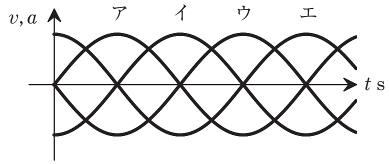


(1) この単振動の振幅 A m, 周期 T s, 振動数 f Hz をそれぞれ有効数字 2 桁で求めなさい。

A =（　　　）m　T =（　　　）s

f =（　　　）Hz

図 2



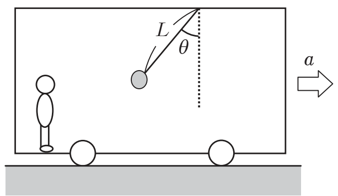
(2) この単振動の速度，加速度の大きさの最大値 v_{max} m/s，a_{max} m/s² をそれぞれ有効数字 2 桁で求めなさい。

v_{max} =（　　　）m/s　a_{max} =（　　　）m/s²

(3) この単振動の速度，加速度を表すグラフは図 2 のア～エのどれか。ただし，縦軸は速度または加速度の大きさを表すものとする。

速度：（　　　）加速度：（　　　）

278 地面に対して水平方向に等加速度運動をしている電車内で，質量 m のおもりを軽い糸につけてつり下げ，電車内からおもりを見ると，糸は鉛直線から θ だけ傾いて静止していた。電車の加速度の大きさを a，重力加速度の大きさを g として次の問いに答えなさい。



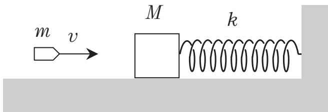
(1) おもりが糸から受ける力の大きさ S を m，g を用いて表しなさい。

(2) $\tan\theta$ を a, g を用いて表しなさい。

(3) 糸がたるまないようにおもりを静止している位置から少しずらして静かに放したところ，おもりは振動した。この振動の周期 T はいくらか。ただし糸の長さを L とし，答えに θ は用いないものとする。

(1) $S=$(　　　　　　)　(2) $\tan\theta=$(　　　　)　(3) $T=$(　　　　　　)

279 図のように，滑らかな水平面上に，ばね定数 k のばねにつながれた質量 M の物体が置かれており，ばねは壁に固定されている。そこに質量 m の弾丸が速さ v で右向きに飛んできて，物体に衝突した後，物体と一体となってばねを押し縮めた。弾丸が物体に接触してから物体と一体となるまでの間のばねの縮みは小さく無視できるものとして，次の問いに答えなさい。



(1) 弾丸と物体の運動量及び力学的エネルギーの総和は，衝突前と一体となった直後で保存されるか。

運動量：(　　　　　　　　)，力学的エネルギー：(　　　　　　　　)

(2) 一体となった直後の物体と弾丸の速さを求めなさい。(　　　　　　)

(3) 衝突後，物体と弾丸が単振動したとき，その振幅と角振動数を求めなさい。

振幅：(　　　　　　)，角振動数：(　　　　　　)

280 底面積 S，高さ L の円柱状の木片を，木片よりも十分大きい水槽の水に浮かべ，その運動について考える。木片は水中を抵抗なく滑らかに運動し，水面のゆれや表面張力は無視する。また，すべての運動は鉛直方向のみを考え，横揺れや回転運動はしないものとする。水の密度を ρ，木片の密度を $\frac{\rho}{4}$，重力加速度の大きさを g として，次の問に答えなさい。

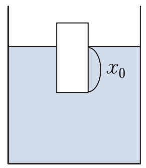


図 1

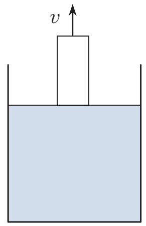


図 2

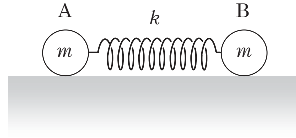
(1) 図 1 のように，木片が静止しているとき，水面から木片の底面までの深さ x_0 を求めなさい。

(2) 木片を静止状態からわずかに水中に押し下げ，静かに放したところ，木片は上下に周期運動を始めた。その周期 T を求めなさい。

(3) 次に，木片の上面が水面と同じになるまで押し下げ，静かに放すと，図 2 のように，木片は水中から飛び出した。木片の底面が水面と同じ高さになったときの木片の速さを求めなさい。

(1) $x_0=$(　　　　　)　(2) $T=$(　　　　　)　(3) $v=$(　　　　　　)

281 図のように，ばね定数 k の軽いばねの両端に質量 m の物体 A，B をつけ，滑らかな水平面上に置く。ばねを縮めて放すと，物体は単振動をした。単振動の周期はいくらか。



(　　　　　　　)