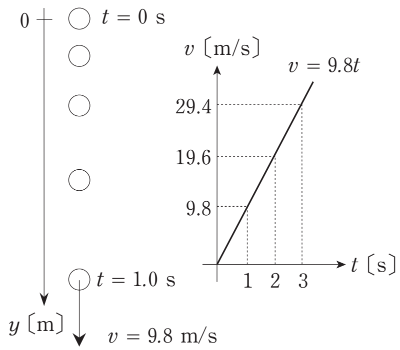
●目　次●

Chapter 03
重力による運動

自由落下運動



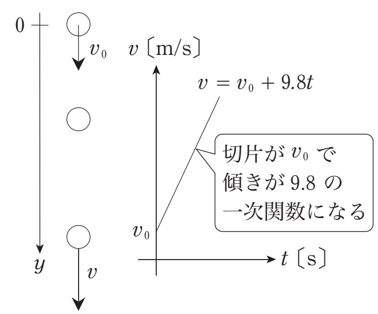
物体を静かに放し，初速が 0 で落下するような運動を**自由落下運動**という。空気抵抗や浮力が無視できるとき，この運動は質量にかかわらず，物体の速さが 1.0 秒ごとに約 9.8 m/s ずつ増加するような**等加速度直線運動**であることが知られており，このときの加速度を**重力加速度**という。（重力加速度の大きさは一般に g〔m/s^2〕が用いられる。加速度の定義は p15 を参照して確認しておこう）

図のように鉛直下向きに y 軸をとり，原点から初速 0 で自由落下させるとき，落下を始めてから t 秒後の速度 v と位置 y は，等加速度直線運動の公式を次のように変えることで得られる。

$$\text{速度}：v=v_0+at \xrightarrow{a\to g} v=gt$$
$$\text{位置}：x=v_0t+\frac{1}{2}at^2 \xrightarrow[x\to y]{v_0\to 0} y=\frac{1}{2}gt^2$$

⚠ 落下運動の公式は y 軸を下向きにとって導かれているので，落下運動の問題を解くときは，必ず y 軸を下向きにとって考えること。

鉛直投げ下ろし運動



鉛直下向きに初速 v_0〔m/s〕を与えて物体を投げ下ろしても，空気抵抗や浮力が無視できれば，物体は自由落下運動と同じ加速度で落下する。右図のように鉛直下向きに y 軸をとり，原点から物体を初速 v_0〔m/s〕で投げ下ろすとき，落下を始めてから t 秒後の速度 v と位置 y は，等加速度直線運動の公式を次のように変えることで得られる。（重力加速度の大きさを g〔m/s^2〕とする）

$$\text{速度}：v=v_0+at \xrightarrow{a\to g} v=v_0+gt$$
$$\text{位置}：x=v_0t+\frac{1}{2}at^2 \xrightarrow[x\to y]{} y=v_0t+\frac{1}{2}gt^2$$

⚠ 落下運動の公式は y 軸を下向きにとって導かれているので，落下運動の問題を解くときは，必ず y 軸を下向きにとって考えること。

暗記

【落下運動の公式】　速度：$v=v_0+at$　　位置：$x=v_0t+\frac{1}{2}at^2$

自由落下運動のときは $v_0=0$　g：重力加速度の大きさ（$g\fallingdotseq 9.8$ m/s^2）

35 高さが h〔m〕のビルの屋上の端から地上に向かって小球を静かに落下させるとき，次の問いに答えなさい。ただし，重力加速度の大きさを g〔m/s^2〕とする。

(1) 小球が放たれてから t 秒後の小球の速さ v〔m/s〕と落下距離 y〔m〕を求めなさい。

$v=$（　　　　　）〔m/s〕　$y=$（　　　　　）〔m〕

(2) 小球が放たれてから地面に衝突するまでの時間を求めなさい。（　　　　）〔s〕

(3) 小球が地面に衝突する直前の小球の速さを求めなさい。（　　　　）〔m/s〕

36 水面からの高さが 44 m の橋の上から，ある初速で小石を鉛直下向きに投げると，2.0 秒後に水面に達した。このとき次の問いに答えなさい。ただし，重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とし，有効数字は 3 桁で答えること。

(1) 小石の初速を v_0〔m/s〕として，小石が放たれてから t 秒後の小球の速さ v〔m/s〕と落下距離 y〔m〕を求めなさい。

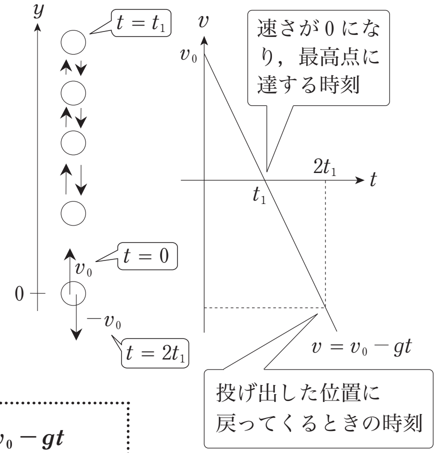
$v=$（　　　　　）m/s　$y=$（　　　　　）m

(2) 小石の初速を求めなさい。（　　　　）m/s

(3) 小石が水面に達したときの速さを求めなさい。（　　　　）m/s

鉛直投げ上げ運動

鉛直上向きに初速を与えて物体を投げ上げた場合，空気抵抗や浮力が無視できれば，物体は速度が 1.0 秒ごとに約 9.8 m/s ずつ減少するような等加速度直線運動をする。右図のように鉛直上向きに y 軸をとり，原点から物体を初速 v_0〔m/s〕で投げ上げるとき，投げ上げてから t 秒後の速度 v と位置 y は，等加速度直線運動の公式を次のように変えることで得られる。（重力加速度の大きさを g〔m/s²〕とする）



$$\text{速度}：v = v_0 + at \xrightarrow{a \to -g} v = v_0 - gt$$

$$\text{位置}：x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \xrightarrow[x \to y]{} y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

暗記

【投げ上げ運動の公式】 速度：$v = v_0 - gt$　位置：$y = v_0 t - \dfrac{1}{2}gt^2$

速度は鉛直上向きを正とする　y 軸は鉛直上向き

なお，この運動では，一般に投げ上げてから最高点に達するまでの時間と，最高点から投げ上げた位置に達するまでの時間は等しい。

鉛直投げ上げ運動の公式は y 軸を上向きにとって導かれているので，鉛直投げ上げの問題を解くときは，必ず y 軸を上向きにとって考えること。

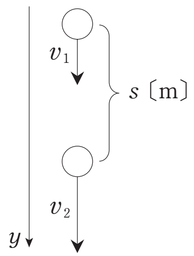
等加速度直線運動の公式

前章で学習したが，等加速度直線運動においては，次の公式が得られた。

（後の速度）^{2} −（前の速度）^{2} ＝ 2 ×（加速度）×（速度が変化する間の変位）

自由落下運動，鉛直投げ下ろし運動，鉛直投げ上げ運動も等加速度直線運動であるので，この公式を用いることができる。

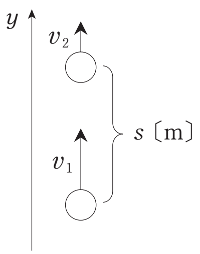
● **y 軸が鉛直下向きの場合**



公式中の加速度 a を g に置き換えればよい

$$v_2^2 - v_1^2 = 2as \ \xrightarrow{a \to g}\ v_2^2 - v_1^2 = 2gs$$

● **y 軸が鉛直上向きの場合**

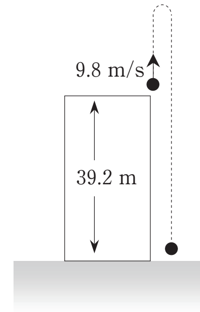


公式中の加速度 a を $-g$ に置き換えればよい

$$v_2^2 - v_1^2 = 2as \ \xrightarrow{a \to -g}\ v_2^2 - v_1^2 = 2(-g)s$$

『速度の正の向き』は『y 軸の正の向き』であることに注意すること。

37 図のように，高さ 39.2 m のビルの屋上の端から小球を初速 9.8 m/s で鉛直上向きに投げ上げると，小球は直線運動をして地上に落下した。小球の速度は鉛直上向きを正，重力加速度の大きさを 9.8 m/s² として，次の問いに答えなさい。ただし，有効数字は 2 桁で答えること。



(1) 小球が投げ上げられてから t 秒後の小球の速度 v〔m/s〕と屋上からの高さ y〔m〕を求めなさい。

v =（　　　　　　）m/s　y =（　　　　　　）m

(2) 小球が最高点に達するのは投げ上げてから何秒後か。（　　　　）秒後

(3) 屋上から最高点までの高さを求めなさい。（　　　　）m

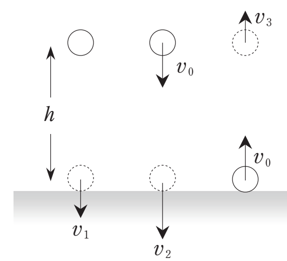
(4) 小球がビルの屋上と同じ高さに戻ってくるのは，投げ上げてから何秒後か。

（　　　　）秒後

(5) 屋上と同じ高さに戻ってきたときの小球の速度を求めなさい。（　　　　）m/s

(6) 小球が地面に到達する時刻は，投げ上げてから何秒後か。（　　　　）秒後

38 重力加速度の大きさを g〔m/s²〕として，次の問いに答えなさい。



(1) 地上 h〔m〕の高さから小球を自由落下させたとき，地上に衝突する直前の小球の速さ v_1 を求めなさい。

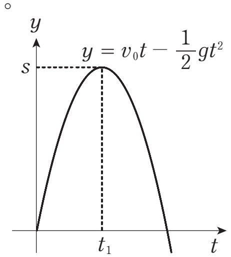
(2) 地上 h〔m〕の高さから小球を初速 v_0〔m/s〕で鉛直下向きに投げ下ろしたとき，地上に衝突する直前の小球の速さ v_2 を求めなさい。

(3) 地上から小球を鉛直上向きに初速 v_0〔m/s〕で投げ上げ，小球の高さが地上 h〔m〕となったときの小球の速さ v_3 を求めなさい。

(1) v_1 =（　　　　　）(2) v_2 =（　　　　　）(3) v_3 =（　　　　　）

例題 1

小球を地上から初速 v_0 で鉛直上向きに投げ上げた。小球の地上からの最高点の高さを求めなさい。ただし重力加速度の大きさを g〔m/s²〕とする。



鉛直投げ上げの公式：$v = v_0 - gt$ を用いる。

時刻 t_1 で最高点に達したとすると，最高点での速さは 0 であるので，$0 = v_0 - gt_1$ よって，$t_1 = \dfrac{v_0}{g}$

公式 $y = v_0 t - \dfrac{1}{2}gt^2$ において，$t = t_1$ のときの y の値が，小球の最高点の高さであるので，その高さは，

$$y = v_0\left(\frac{v_0}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{v_0^2}{2g}} \cdots \text{（答）}$$

別解 公式 $v_2^2 - v_1^2 = 2(-g)s$ より，$0^2 - v_1^2 = 2(-g)s$ よって，$s = \boldsymbol{\dfrac{v_0^2}{2g}}$ …（答）

39 初速 v_0〔m/s〕($v_0 > 0$) で鉛直上向きに投げた小球について，次の問いに答えなさい。ただし，小球の速度は鉛直上向きを正とし，重力加速度の大きさを g〔m/s²〕とする。

(1) 小球が放たれてから t 秒後の小球の速度 v〔m/s〕を求めなさい。

v = (　　　　　　)〔m/s〕

(2) (1) の式について，$v = 0$ のとき $t = t_1$ とするとき，t_1 を v_0, g で表しなさい。

t_1 = (　　　　　　)〔s〕

(3) 小球が放たれてから t 秒後の，放たれた位置からの小球の高さ y〔m〕を求めなさい。

y = (　　　　　　)〔m〕

(4) (3) の式で $t = t_2$ のとき $y = 0$ であるとする。このとき，t_2 を v_0，g で表しなさい。ただし $t_2 \neq 0$ とする。

(5) (2),(4) の結果より，t_2 を t_1 だけの文字式で表しなさい。 t_2 = (　　　　　　)

(6) 小球が放たれた位置から最高点までの高さを求めなさい。 (　　　　　　)〔m〕

(7) 放たれた位置に戻ってきたときの小球の速度を求めなさい。(　　　　　　)〔m〕

(8) 小球の速度が $+\dfrac{1}{2}v_0$ になったとき，小球は放たれた位置から何 m 上昇するか。

(　　　　　　)〔m〕

章　末　問　題

40 高さ 640 m の塔の頂上から小球を自由落下させたとき，次の問いに答えなさい。ただし，重力加速度の大きさを 9.8 m/s² とし，有効数字は 2 桁で答えること。

(1) 小球が落下を始めてから地上に到達するまで何秒かかるか。(　　　　) 秒

(2) 地上に到達する直前の小球の速さは何 m/s か。(　　　　) m/s

41 地上から高さ 14.7 m の地点から，初速 9.8 m/s で小球を鉛直下向きに投げ下ろした。重力加速度の大きさを 9.8 m/s² として，次の問いに答えなさい。ただし，有効数字は 2 桁で答えること。

(1) 小球が地面に到達するまでに要する時間を求めなさい。(　　　　) s

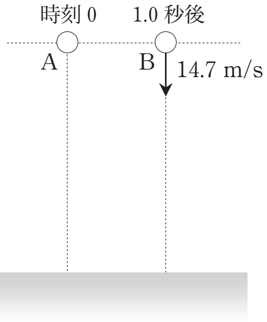
(2) 小球が地面に着く直前の速さを求めなさい。(　　　　) m/s

42 速さ 4.9 m/s で上昇している気球の上から小球を静かに放したところ，4.0 s 後に地表に到達した。重力加速度の大きさを 9.8 m/s² として，有効数字 2 桁で次の問いに答えなさい。

(1) 小球を放したときの地表からの気球の高さはいくらか。 (　　　　) m

(2) 地表に達する直前の小球の速さはいくらか。 (　　　　) m/s

43 図のように，ある高さから物体 A を自由落下させ，その 1.0 秒後に同じ高さから物体 B を初速 14.7 m/s で鉛直下向きに投げ下ろすと，A と B は同時に着地した。重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 として次の問いに答えなさい。ただし，有効数字は 2 桁で答えること。



(1) A は落下を始めてから何秒後に着地するか。

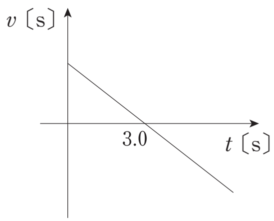
(　　　　　) 秒後

(2) A と B は地上何 m の高さから落下させたか。

(　　　　　) m

(3) A が着地する直前の速さは，B が着地する直前の速さの何倍か。(　　　　　) 倍

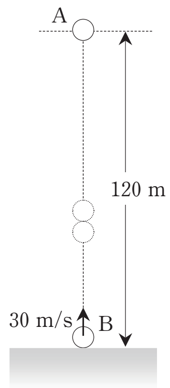
44 時刻 0 で地上から小球を鉛直上向きに投げ上げると，小球の速度 v〔m/s〕と時刻 t〔s〕との関係は右のグラフのようになった。重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 として，次の問いに答えなさい。ただし，有効数字は 2 桁で答えること。



(1) 小球の初速を求めなさい。(　　　　　) m/s

(2) 投げ上げた位置から最高点まで小球の高さを求めなさい。(　　　　　) m

45 地上 120 m の高さから小球 A を自由落下させると同時に，A の直下の地上から小球 B を鉛直上向きに速度 30 m/s で投げ上げ，2 つの小球を衝突させた。重力加速度を 9.8 m/s^2 として，次の問いに答えなさい。ただし，有効数字は 2 桁で答えること。



(1) A,B が放たれてから衝突するまでの時間と，衝突したときの 2 つの小球の地上からの高さを求めなさい。

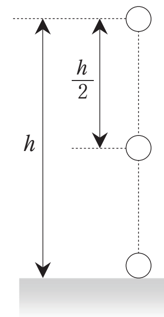
(　　　　　) s，(　　　　　) m

(2) 衝突する直前の B の速さと向きを答えなさい。

速さ：(　　　　　) m/s，向き：(　　　　　)

(3) 衝突する直前の A の速さを求めなさい。(　　　　　) m/s

46 小球を地上から高さ h〔m〕の地点から自由落下させた。重力加速度の大きさを g〔m/s^2〕として，次の問いに答えなさい。



(1) 小球を放してから地面に到達するまでの時間 T〔s〕を求めなさい。(　　　　　)〔s〕

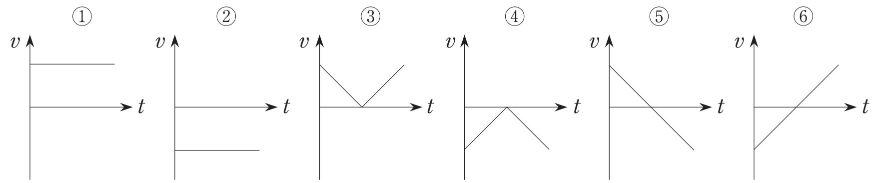
(2) 前半の $\frac{h}{2}$〔m〕を落下する時間 t_1〔s〕と後半の $\frac{h}{2}$〔m〕を落下する時間 t_2〔s〕をそれぞれ求めなさい。

t_1 =(　　　　　)〔s〕，t_2 =(　　　　　)〔s〕

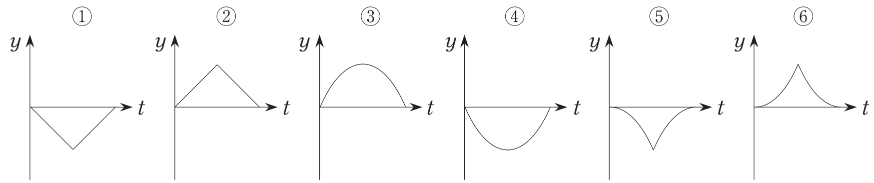
(3) t_2 は t_1 の何倍であるか。有効数字 2 桁で答えなさい。ただし，$\sqrt{2} = 1.414$ とする。

(　　　　　) 倍

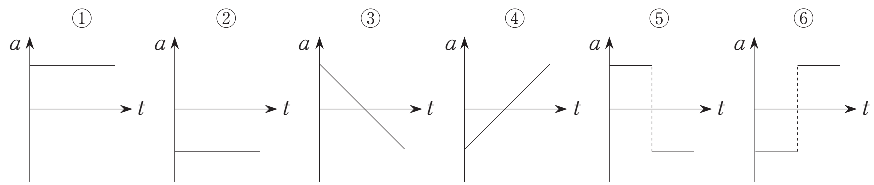
47 原点から鉛直上向きに投げ上げられた物体の，投げ上げられてから t〔s〕後の速度を v〔m/s〕，位置を y〔m〕，加速度を a〔m/s^2〕とする。この物体の運動の $v-t$ グラフ，$y-t$ グラフ，$a-t$ グラフとして適切なグラフをそれぞれ①～⑥から選びなさい。ただし，位置及び速度は鉛直上向きを正とする。



$v-t$ グラフ (　　　　)



$y-t$ グラフ (　　　　)



$a-t$ グラフ (　　　　)

Chapter 07

仕事とエネルギー

三角比の拡張

図１のように xy 平面上の原点 O を中心とする半径１の円を考える。この円周上の $x>0$ かつ $y>0$ の領域にある点を P，点 (1, 0) を A とし，P から x 軸におろした垂線の足を H，$\angle AOP=\theta$ とすると，△OPH は直角三角形であるので，

$$OH = OP\cos\theta = 1\times\cos\theta$$
$$PH = OP\sin\theta = 1\times\sin\theta$$

つまり，点 P の座標は $(\cos\theta, \sin\theta)$ となる。そして，図２のように，θ が 90° 以上でも，$(\cos\theta, \sin\theta)$ は同一の円周上の座標になるように定義されているので，例えば 120° の余弦と正弦は，図３のように作図して，

$$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}\qquad \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

と求められる。また，$P(\cos\theta, \sin\theta)$ はこの円周上の座標であることから，次が成り立つ。

図１

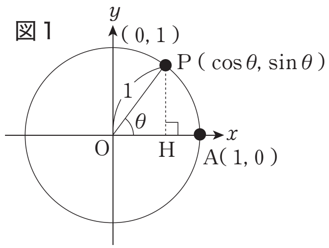


図２

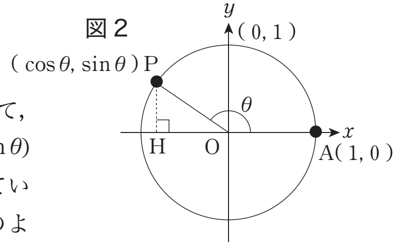
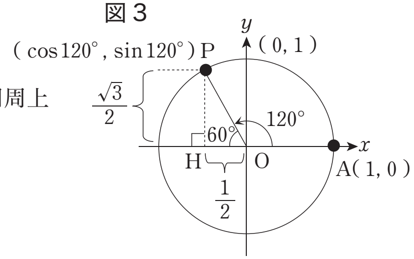


図３



$$(\cos 0^\circ, \sin 0^\circ) = (1, 0)$$
$$(\cos 90^\circ, \sin 90^\circ) = (0, 1)$$
$$(\cos 180^\circ, \sin 180^\circ) = (-1, 0)$$

なお，三平方の定理より，$OH^2 + PH^2 = OP^2$ であるので次の重要な性質がある。

$$\boldsymbol{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1}$$

また，$(\cos\theta, \sin\theta)$ は原点を中心とする半径１の円周上の座標であるので，それぞれの値のとり得る範囲は次のようになる。

$$\boldsymbol{-1 \leqq \cos\theta \leqq 1,\ -1 \leqq \sin\theta \leqq 1}$$

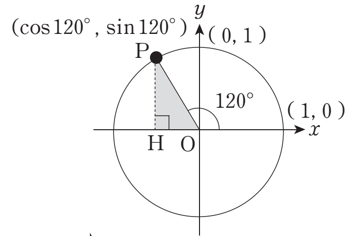
さらに，$0 \leqq \theta \leqq 360^\circ$ としたとき，余弦，正弦，正接の正負は次のようになる。

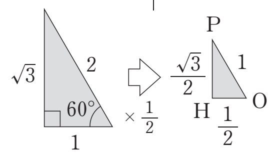
θ	0°	…	90°	…	180°	…	270°	…	360°
$\cos\theta$	1	正	0	負	−1	負	0	正	1
$\sin\theta$	0	正	1	正	0	負	−1	負	0
$\tan\theta$	0	正	±∞	負	0	正	±∞	負	0

⚠「＋∞」を「正の無限大」，「－∞」を「負の無限大」といい，どちらも絶対値が限りなく大きい数を表す。$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ は OP の傾きを表すので，tan 90° や tan 270° は正または負の無限大になる。

例題 1

$\cos 120^\circ, \sin 120^\circ, \tan 120^\circ$ をそれぞれ求めなさい。





図の OH, PH の長さを求めると，直角三角形 OPH の辺の比は $1:2:\sqrt{3}$ であるので，

$OH = \dfrac{1}{2}$, $PH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる。

角が 90° ～ 180° では，

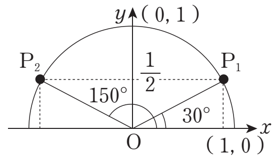
$\cos\theta < 0$，$\sin\theta > 0$ であるので，

$\cos 120^\circ = -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$，$\sin 120^\circ = \dfrac{\boldsymbol{\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}$ …(答)

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \boldsymbol{-\sqrt{3}}\ \text{…(答)}$$

例題 2

$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ となる θ をすべて求めなさい。ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。



左図のように $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ では円周上の y 座標が $\dfrac{1}{2}$ となる点は P_1, P_2 の２カ所であるので，

$\theta = \mathbf{30^\circ, 150^\circ}$ …(答)

102 次の三角比に関する表を埋めなさい。ただし，根号はそのまま用いること。

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\cos\theta$									
$\sin\theta$									
$\tan\theta$					—				

103 $0 \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき次の問いに答えなさい。

(1) $\cos\theta, \sin\theta$ の取り得る範囲をそれぞれ不等式で表しなさい。

(2) $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる θ をすべて求めなさい。ただし，$0 \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。

(3) $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる θ をすべて求めなさい。ただし，$0 \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。

(1) (　　　　　　　　　　　　　　　　　)

(2) (　　　　　　　　　　) (3) (　　　　　　　　　　)

仕事の定義

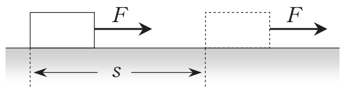
力を加えて物体を動かすときや，動きに逆らって物体に力を加えるとき，「力は物体に仕事をする」といい，その**力の大きさを F〔N〕，物体の変位の向きと力の向きとの成す角を θ，力を加えている間の物体の移動距離を s〔m〕**とすると，物理量としての仕事 W は次のように定義されている。

力がする仕事：$W = Fs\cos\theta$ …①

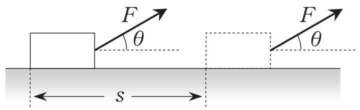
⚠ 力がする仕事は日常で使う仕事と異なる。

①の右辺の単位は〔**N·m**〕（ニュートンメートル）となり，この組立単位は〔**J**〕（**ジュール**）として定義されている。なお，右図からもわかるように，物体の移動を促すように力を加えるときの力がする仕事は正，移動を妨げるように力を加えるときの力がする仕事は負，$\theta = 90°$ のときの仕事は 0 J である。

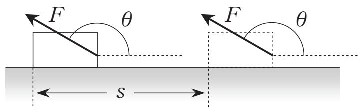
$\theta = 0° \Rightarrow W = Fs\cos\theta = Fs$



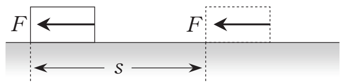
$0° < \theta < 90° \Rightarrow W = Fs\cos\theta > 0$



$90° < \theta < 180° \Rightarrow W = Fs\cos\theta < 0$



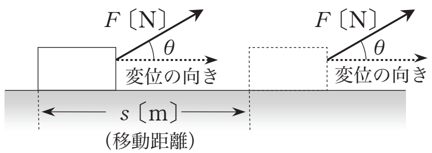
$\theta = 180° \Rightarrow W = Fs\cos 180° = -Fs$



暗記

力がする仕事：$W = Fs\cos\theta$

⚠ 仕事の単位：〔J〕＝〔N·m〕



$\theta = 0° \to W = Fs\cos 0° = Fs$

$\theta = 90° \to W = Fs\cos 90° = 0$

$\theta = 180° \to W = Fs\cos 180° = -Fs$

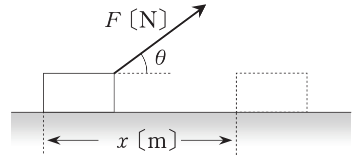
$0° \leqq \theta < 90° \to W > 0$

$90° < \theta \leqq 180° \to W < 0$

注1 仕事は正負が存在するが**スカラー量**

注2 θ は力の向きと物体の変位の向きとの成す角であることに注意すること

104 図のように，水平面上に置かれた質量 m〔kg〕の物体に，水平面と θ の角を成すように F〔N〕の力を加え続け，物体を水平方向に x〔m〕だけ動かした。重力加速度の大きさを g〔m/s^2〕，物体と水平面との間の動摩擦係数を μ として，次の問いに答えなさい。



(1) F〔N〕の力を加えているとき，物体にはたらく垂直抗力の大きさ N，及び動摩擦力の大きさ R をそれぞれ求めなさい。

N：(　　　　　　)〔N〕
R：(　　　　　　)〔N〕

(2) 物体が x〔m〕動く間に，物体を引く F〔N〕の力がした仕事 W_1，物体にはたらく重力がする仕事 W_2，物体にはたらく垂直抗力がする仕事 W_3，物体にはたらく動摩擦力がする仕事 W_4 をそれぞれ単位も含めて答えなさい。ただし，単位は N を含まない単位で答えること。

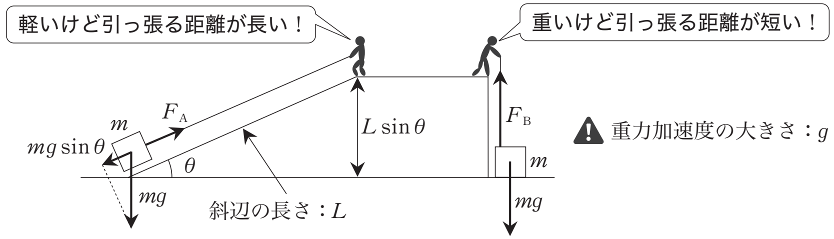
W_1：(　　　　)〔　　〕W_2：(　　　　)〔　　〕
W_3：(　　　　)〔　　〕W_4：(　　　　)〔　　〕

105 図のように，水平面上で犬を散歩させる人が水平面から 30° の向きに 10 N の力で犬を引っ張りながら前方に歩いている。犬が 10 m 歩いたとき，人が引く力がする仕事を求めなさい。ただし，犬につけたリードの質量は無視できるものとし，根号は用いたまま答え，単位は〔N〕を含む単位で答えること。

(　　　　　)〔　　　〕

仕事の原理

図のように，台の上にいる人が質量 m の物体を滑らかな斜面に沿ってゆっくり引き上げる場合と，鉛直上向きにゆっくり引き上げる場合で，引き上げる力がする仕事の違いを考えてみよう。斜面の傾きを θ，斜面の長さを L とすると，台の高さは $L\sin\theta$ となる。



⚠ 重力加速度の大きさ：g

物体を斜面に沿って引き上げるための必要な力の大きさは $F_\mathrm{A} = mg\sin\theta$ であり，鉛直上向きに引き上げるための必要な力の大きさは $F_\mathrm{B} = mg$ である。従って引き上げる力がする仕事はそれぞれ次のように求めることができる。

斜面を引き上げる場合の引き上げる力がする仕事 $= F_\mathrm{A}L = mgL\sin\theta$

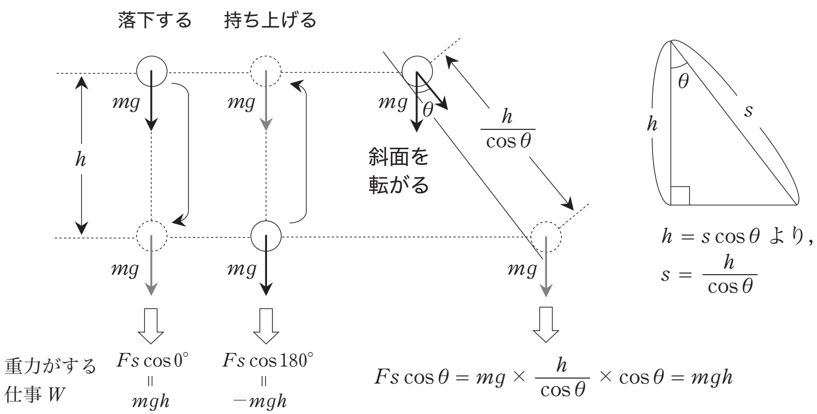
鉛直上向きに引き上げる場合の引き上げる力がする仕事 $= F_\mathrm{B}L\sin\theta = mgL\sin\theta$

どちらの場合も仕事は等しくなる。このように，道具や装置を使って必要な力の大きさを変えても，同等の効果をもたらすための仕事は変わらない。このことを**仕事の原理**という。

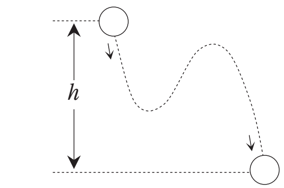
重力がする仕事

質量 m の物体には常に鉛直下向きに大きさ mg の重力がはたらくことに注意して，次の場合の重力がする仕事 W について考えてみよう。図 1 は重力と同じ向きに距離 h だけ落下した場合，図 2 は重力に逆らって鉛直上向きに距離 h だけ持ち上げた場合，図 3 は重力と θ の角を成すように斜面を下って高さが h だけ下がった場合である。

図 1　図 2　図 3



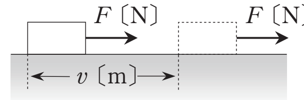
この結果からもわかるように，高さが h だけ下がった場合は $W = mgh$ となり，高さが h だけ上がった場合は $W = -mgh$ となる。このように，重力がする仕事は物体の移動前後の高さの差だけで決まり，移動経路によらないことが知られている。例えば，右のような経路をたどったとしても，重力がする仕事は高さが h だけ下がったので，$W = mgh$ となる。



暗記
重力が物体にする仕事は移動経路によらず
高さが h だけ下がった場合：$W = mgh$〔J〕
高さが h だけ上がった場合：$W = -mgh$〔J〕

⚠ 経路によらないことを示すには高度な数学の知識を要するため，現段階では行えない。

仕事率



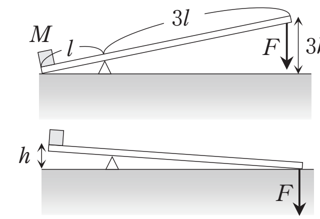
力が 10 秒かかってある大きさの仕事をするときと，20 秒かかって同じ大きさの仕事をするときでは，仕事の能率が異なる。この能率を表す物理量が**仕事率**であり，t〔s〕かかって W〔J〕の仕事をする場合の仕事率 P は右のように定義されている。仕事率の単位はこの定義式によって〔J/s〕となるが，これは〔W〕（ワット）と定義されている。つまり，〔W〕＝〔J/s〕であり，1 W は 1 s 当たり 1 J の仕事をするような大きさを表す。

$$P = \frac{W}{t} = \frac{Fs}{t} = F\left(\frac{s}{t}\right) = Fv\text{〔W〕}$$

暗記
仕事率：$P = \dfrac{W}{t} = Fv$〔W〕

ここで図のように，物体に F〔N〕の一定の力を加え続け，物体が速さ v〔m/s〕の等速直線運動をしているとき，F〔N〕の力の仕事率 P を考えてみよう。物体は 1 s で v〔m〕移動するので，F〔N〕の力は 1 s で Fv〔J〕の仕事をすることになる。よって，$\boldsymbol{P = Fv}$〔W〕と求められる。また，物体が t〔s〕で s〔m〕進んだとすると，速さは $v = \frac{s}{t}$ であることから同様に求めることもできる。

106 図のように，支点までの長さの比が 1：3 の軽いてこを用いて，質量 M〔kg〕の小物体を高さ h〔m〕まで引き上げるには，てこの端を $3h$〔m〕引き下げる必要がある。重力加速度の大きさを g〔m/s^2〕として，次の問いに答えなさい。

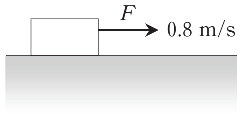


(1) 小物体が h〔m〕引き上げられたとき，重力が小物体にした仕事は何 J か。（　　　）〔J〕

(2) 小物体がゆっくりと h〔m〕引き上げられたとき，てこの端に加えられた力 F の大きさは何 N か。また，h〔m〕引き上げられるのに Δt 秒かかったとき，力 F の仕事率は何 W か。（　　　　　）〔N〕（　　　　　）〔W〕

(3) (2) で答えた力の大きさの根拠となる原理は何か。（　　　　　　　　　　）

107 図のように，粗い水平面上に置かれた質量 30 kg の物体に力 F を水平方向に加え，速さが 0.8 m/s で一定となるように動かした。物体と水平面との間の動摩擦係数は 0.30, 重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 として，有効数字は 2 桁で次の問いに答えなさい。



(1) 仕事率の単位である〔W〕を〔J〕ともう 1 つの単位を用いて表しなさい。(　　　)

(2) 物体にはたらく動摩擦力 R の大きさを求めなさい。(　　　　　　　) N

(3) 物体を引く力 F の仕事率を求めなさい。(　　　　　　　) W

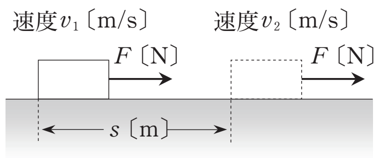
(4) 物体を引く力 F は 10 秒で何 J の仕事をするか。(　　　　　　　) J

運動エネルギー

ある物体が他の物体に仕事をする能力を秘めているとき，その物体は「**エネルギーを持っている**」という。運動している物体は，他の物体に衝突すれば，他の物体に対して仕事をすることができる。よって, 運動している物体はエネルギーを持っているといえ，そのエネルギーを特に**運動エネルギー**という。物体の運動エネルギーは次の式で定義されている。

暗記

物体の運動エネルギー：$\frac{1}{2}mv^2$　　m：質量　v：速さ



では，運動エネルギーが何故このように定義されたのかを考えてみよう。

図のように，滑らかな水平面上を速度 v_1〔m/s〕で等速直線運動する質量 m の物体に，移動の向きと同じ向きに F〔N〕の力を加えると，物体は等加速度直線運動をする。このときの物体の加速度を a〔m/s〕，力を加えてから s〔m〕変位したときの物体の速度を v_2〔m/s〕とすると，運動方程式は次のように表される。

$$ma = F \cdots ①$$

一方，等加速度直線運動の公式より，$v_2^2 - v_1^2 = 2as$　この両辺を $2a$ で割ると，

$$\frac{1}{2a}(v_2^2 - v_1^2) = s \cdots ②$$

①, ②の辺々をかけると，$ma \times \frac{1}{2a}(v_2^2 - v_1^2) = Fs$ となり，左辺を整理して左辺と右辺を入れ換えると，次の式が得られる。

$$Fs = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \cdots ③$$

③式の左辺は力がする仕事である。ここで, 右辺の各項を運動エネルギーと定義すると，次の関係式が成り立つ。

【外力がする仕事】
＝【後の運動エネルギー】－【初めの運動エネルギー】＝【運動エネルギーの変化】

つまり，外力がする仕事は運動エネルギーの増加量となり，その仕事によって物体に運動エネルギーが蓄えられたと考えることができる。さらに，③式は移項によって，次のようになる。

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + Fs = \frac{1}{2}mv_2^2 \cdots ③'$$

すると，③′は次のように解釈することができる。

【初めの運動エネルギー】＋【外力がする仕事】＝【後の運動エネルギー】

運動方程式を立てる場合は，物体の加速度を考慮しなければいけないが，上記の関係式を使うことで，加速度を考慮することなく，運動の様子をとらえることができる。

注 1　仕事とエネルギーの関係式は運動方程式から導出されたに過ぎない。つまり，運動を伴う問題は，運動方程式を立てても，この関係式を用いても，どちらでも解くことができる。

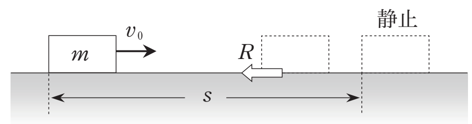
注 2　①より，N = kg·(m/s^2)であることに注意すると，
Fs の単位 ➡ J = N·m = {kg·(m/s^2)}·m = kg·(m^2/s^2)
$\frac{1}{2}mv_1^2$ の単位 ➡ kg·(m/s)^2 = kg·(m^2/s^2)
よって，仕事と運動エネルギーの単位は一致する。

108 次の問いに答えなさい。ただし，有効数字は 2 桁で答えること。

(1) 質量 2.0 kg，速さ 5.0 m/s の物体が持っている運動エネルギーはいくらか。
(　　　　　　) J

(2) 質量 0.5 kg の物体が 4.0 J の運動エネルギーをもって運動しているとき，物体の速さはいくらか。(　　　　　　) m/s

109 次の空欄に適切な数式や言葉を埋めなさい。



図のように，粗い水平面上に置かれた質量 m〔kg〕の物体に初速 v_0〔m/s〕を水平右向きに与えると，物体は一定の加速度で減速し，s〔m〕進んだところで静止した。このときの加速度の水平成分を a〔m/s^2〕，動摩擦力の大きさを R〔N〕とすると，水平方向の運動方程式は，右向きを正として，

$$ma = \boxed{ア} \cdots ①$$

また，物体は等加速度直線運動をしたので，公式により，$0^2 - v_0^2 = \boxed{イ}$ …②

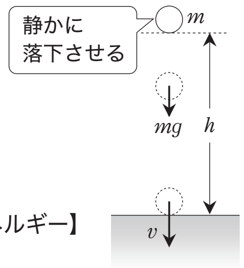
①，②より a を消去すると，$\boxed{ウ}$ $-Rs = 0$ よって，

(初めの $\boxed{エ}$) ＋ (動摩擦力がする $\boxed{オ}$) ＝ (後の $\boxed{エ}$)

という関係が成り立つことがわかる。

ア.(　　　　　　) イ.(　　　　　　) ウ.(　　　　　　)
エ.(　　　　　　) オ.(　　　　　　)

重力による



右図のように，地上から h〔m〕の高さにある質量 m〔kg〕の小球を自由落下させ，地上に衝突する直前の小球の速さを v〔m/s〕，重力加速度の大きさを g〔m/s^2〕とすると，小球が地上に到達するまでの間に重力がする仕事は mgh〔J〕であり，

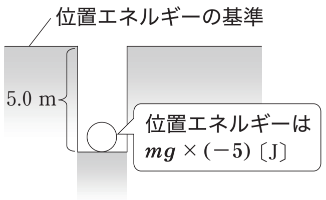
【初めの運動エネルギー】＋【外力がする仕事】＝【後の運動エネルギー】

であるので，$\frac{1}{2}m\cdot 0^2 + mgh = \frac{1}{2}mv^2$　つまり，$mgh = \frac{1}{2}mv^2$

という関係が成り立つ。この式により，h が大きくなるほど地上に到達したときの運動エネルギーが大きくなるので，高さ h にある質量 m の物体には mgh〔J〕のエネルギーが蓄えられているとみなすことができる。この量を**重力による位置エネルギー**という。

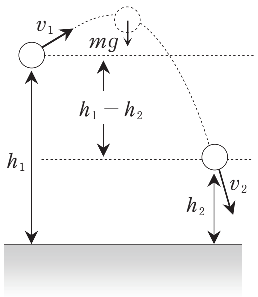
> **暗記**
> **重力による位置エネルギー：mgh**
> m：質量　g：重力加速度の大きさ　h：基準からの高さ

●重力による位置エネルギーの注意事項



重力による位置エネルギー mgh に表れる h は，基準からの高さである。普通は地表面を基準とするが，どの高さを基準にしてもよい。ただし，物体が基準より高い位置にあれば $h>0$，基準より低い位置にあれば $h<0$ としなければいけない。例えば基準より 5 m 低い位置にある物体の位置エネルギーは $mg\times(-5)$〔J〕となる。

力学的エネルギー



右図のように，質量 m の小球が曲線を描いて運動する場合を考える。高さ h_1 にあるときの小球の速さを v_1，高さ h_2 にあるときの小球の速さを v_2 とし，速さが v_1 から v_2 まで変化する間に，小球には重力以外の外力がはたらかないものとする。高さが h〔m〕下がったときに重力がする仕事は物体の経路によらず mgh であったので，この小球の速さが v_1 から v_2 まで変化する間に重力がする仕事は $mg(h_1-h_2)$ である。ここで，

【外力がする仕事】＝【後の運動エネルギー】－【初めの運動エネルギー】であったので，

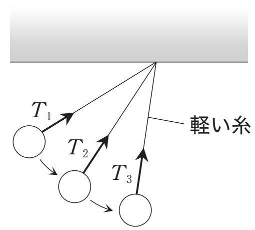
$$\underbrace{mg(h_1-h_2)}_{\text{重力がする仕事}} = \underbrace{\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2}_{\text{運動エネルギーの変化}}\quad よって，\quad \underbrace{\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1}_{\text{初めの力学的エネルギー}} = \underbrace{\frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2}_{\text{後の力学的エネルギー}}$$

つまり，物体の移動前後で，運動エネルギーと位置エネルギーの和は変化しないことになる。その和を**力学的エネルギー**といい，力学的エネルギーが前後で変化しないことを，**力学的エネルギー保存の法則**，もしくは**力学的エネルギー保存則**という。

●保存力とは（…重力，ばねの弾性力，浮力，静電気力，磁気力，万有引力などが保存力）

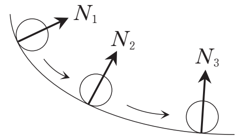
重力のように，移動する物体にする仕事が，その道筋によらず，始点と終点の位置だけで決まるような力を**保存力**といい，一般に，保存力以外の力（非保存力）がはたらいていないとき，力学的エネルギーは保存される。なお，位置エネルギーは「○○力による位置エネルギー」と表現され，○○力の部分は必ず保存力になる。※位置エネルギーは保存力がする仕事を置き換えたものであるので，位置エネルギーを用いる計算では，保存力がする仕事を考慮する必要はない！

●非保存力がはたらいていても力学的エネルギーが保存される場合



実はエネルギーと仕事の関係式は運動方程式を数学的に式変形することで導出される。（この導出は高度な数学の知識を要するため現段階では不可能）その過程において，物体の速度と外力が直交する場合の外力がする仕事は 0 であるという結果になる。

例えば右図のような振り子にはたらく糸の張力や，滑らかな曲面を移動する小球にはたらく垂直抗力は，その大きさは刻々と変化するものの，物体の瞬間の速度との成す角が常に直角であるので，それらの力がする仕事は常に 0 となる。このように非保存力がはたらいていても，その力がする仕事が 0 であれば力学的エネルギーは保存される。



滑らかな曲面

⚠ 接触面が滑らかなとき，非保存力である摩擦力は小さく無視できる。

●エネルギー保存則の重要事項

位置エネルギーは保存力がする仕事を置き換えているので，例えば次のような計算は誤りである。

×**【初めの力学的エネルギー】＋【重力がする仕事】＝【後の力学的エネルギー】**

→重力がする仕事を２重に計算しているので誤り！

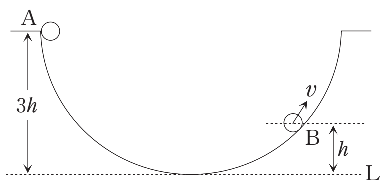
ただし，非保存力がはたらく場合は，次のような計算ができる。（以下も運動方程式から導出できる）

○**【初めの力学的エネルギー】＋【非保存力がする仕事】＝【後の力学的エネルギー】**

○**【非保存力がする仕事】＝【後の力学的エネルギー】－【初めの力学的エネルギー】**

> **暗記**
> **【力学的エネルギー】＝【運動エネルギー】＋【位置エネルギー】**
> **●力学的エネルギー保存則**
> 非保存力がはたらかない，もしくは非保存力がする仕事が 0 である場合，
> **【初めの力学的エネルギー】＝【後の力学的エネルギー】**
> 非保存力がはたらく場合は次の関係が成り立つ
> **【非保存力がする仕事】＝【後の力学的エネルギー】－【初めの力学的エネルギー】**
> ⚠ これは次のように考えてもよい
> **【初めの力学的エネルギー】＋【非保存力がする仕事】＝【後の力学的エネルギー】**

110 図のように，滑らかな曲面上の点Aで質量 m の小球を初速0で静かに放し，点Bに達したときの小球の速さを v とする。点A，点Bは水平線Lからそれぞれ $3h$，h の高さである。重力加速度の大きさを g として，次の問いに答えなさい。



(1) 位置エネルギーの基準を水平線Lとして，小球が点A，点Bにあるときの重力による位置エネルギーをそれぞれ求め，力学的エネルギー保存則によって成り立つ等式を書きなさい。

A：(　　　)　B：(　　　)　成り立つ等式：(　　　　　　　　　　　　　　　　　　)

(2) 位置エネルギーの基準を点Aの高さとして，小球が点A，点Bにあるときの重力による位置エネルギーをそれぞれ求め，力学的エネルギー保存則によって成り立つ等式を書きなさい。

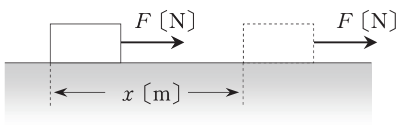
A：(　　　)　B：(　　　)　成り立つ等式：(　　　　　　　　　　　　　　　　　　)

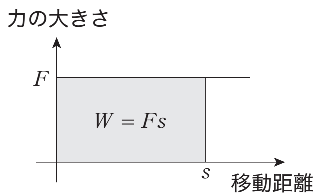
(3) (1) ,(2) で答えた等式をそれぞれ v について解きなさい。

(1) の等式：v = (　　　　　　　　　)　(2) の等式：v = (　　　　　　　　　　)

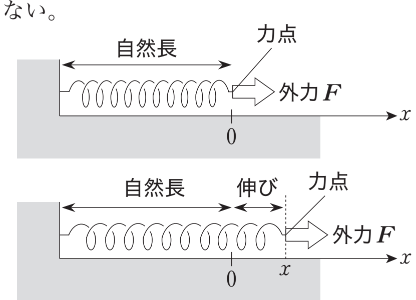
ばねの弾性力による位置エネルギー

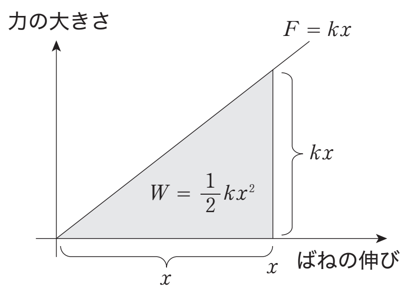
下図のように，F〔N〕で一定の力を物体に加え，力と同じ向きに物体が s〔m〕動いたとき，力がする仕事は $W = Fs$ のように表すことができた。この仕事はグラフに示す面積に相当する。





一方，ばね定数 k〔N/m〕のばねに外力を加え，自然長から x〔m〕引き伸ばす場合，フックの法則により，外力の大きさは自然長からの伸びに比例して大きくなり，一定ではない。





よって，外力がする仕事は単純に，(力の大きさ) × (距離) で求めることはできない。しかし，仕事と面積との対応を考えれば，この外力がする仕事はグラフに示す三角形の面積に対応すると考えられる。この三角形の面積 $= \dfrac{1}{2} \times x \times kx = \dfrac{1}{2}kx^2$ であるので，外力がする仕事は $W = \dfrac{1}{2}kx^2$ となる。

また，外力がばねを x〔m〕縮めた場合も，外力の向きと力点の移動の向きが同じなので，外力がする仕事は正で $W = \dfrac{1}{2}kx^2$〔J〕となる。従って，自然長からのばねの長さの変位を x（伸びる場合は $x > 0$，縮む場合は $x < 0$）と決めると，外力がする仕事は伸びる場合も縮む場合もまとめて $\dfrac{1}{2}kx^2$ と表すことができる。

伸び縮みしたばね自身にエネルギーが蓄えられると考えたとき，そのエネルギーを**弾性エネルギー**という。また，伸び縮みしているばねの端に接続された物体は，ばねが自然長の長さに戻る向きに仕事をすることができるので，**弾性エネルギー**は**弾性力による位置エネルギー**ともいう。

07

暗記

弾性エネルギー／弾性力による位置エネルギー：$\dfrac{1}{2}kx^2$

位置エネルギーの基準：$x = 0$　　k〔N/m〕：ばね定数

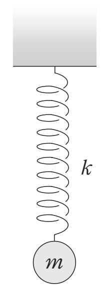
x〔m〕：自然長からのばねの伸び（ばねが縮むときは $x < 0$）

111 次の問いに答えなさい。ただし，(1),(2) は有効数字2桁で答えること。

(1) ばね定数 80 N/m のばねを自然長から 40 cm 縮めたとき，ばねの弾性エネルギーはいくらか。　(　　　　　　　) J

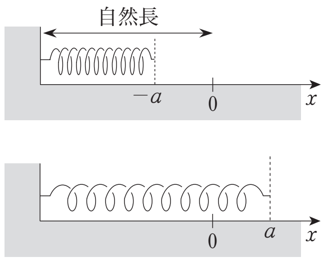
(2) ばね定数 50 N/m のばねを自然長から伸ばすと，ばねの弾性エネルギーは 0.25 J であった。ばねは自然長から何 cm 伸びたか。　(　　　　　　　) cm

(3) 図のように吊り下げられたばね定数 k〔N/m〕のばねの下端に質量 m〔kg〕のおもりをつけて静止させた。重力加速度の大きさを g〔m/s²〕として，このときの弾性力による位置エネルギーを求めなさい。　(　　　　　　　) J



例題 3

一端が壁に固定されたばね定数 k の軽いばねに外力を加え，自然長から a だけ縮んだ状態から a だけ伸びた状態にゆっくり変化させるとき，外力がする仕事 W を求めなさい。



【解法 1】初めから自然長まで伸ばすとき，外力の向きと力点の移動方向は逆なので，外力は $-\dfrac{1}{2}ka^2$ の負の仕事をし，さらに a だけ伸ばすとき，外力は $\dfrac{1}{2}ka^2$ の正の仕事をする。

よって，$W=-\dfrac{1}{2}ka^2+\dfrac{1}{2}ka^2=\mathbf{0}$ …(答)

【解法 2】図のように x 軸をとると，外力がする仕事はばねの力学的エネルギーの変化と考えられるので，

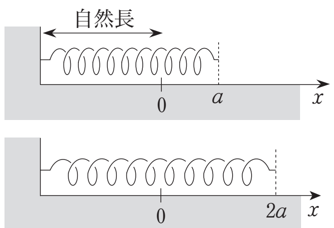
【非保存力がする仕事】＝【後の力学的エネルギー】－【初めの力学的エネルギー】

$=\dfrac{1}{2}ka^2-\dfrac{1}{2}k(-a)^2=\mathbf{0}$ …(答)

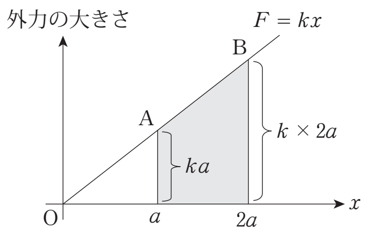
⚠ ばね自体の運動エネルギーも存在するが，ばねが軽いときやゆっくり伸び縮みさせるときは，このエネルギーは小さく無視できる。ばねの運動エネルギーの求め方は高度な計算が必要なため大学で学習する。

例題 4

一端が壁に固定されたばね定数 k の軽いばねに外力を加え，自然長から a だけ伸びた状態から $2a$ だけ伸びた状態にゆっくり変化させるとき，外力がする仕事 W を求めなさい。



【解法 1】ばねは $2a-a=a$ だけ伸びたので，外力がする仕事は $\dfrac{1}{2}ka^2$ とするのは誤りである。$\dfrac{1}{2}ka^2$ は自然長から a だけ伸ばした場合の外力がする仕事であって，この場合の仕事は下のグラフの台形の面積に相当する。



台形 ABCD の面積 $=\triangle\mathrm{OBC}-\triangle\mathrm{OAD}$

$=\dfrac{1}{2}\times 2a\times(k\times 2a)-\dfrac{1}{2}\times a\times(ka)$

$=\dfrac{1}{2}k\times(2a)^2-\dfrac{1}{2}k\times a^2=\dfrac{3}{2}ka^2$

よって，$W=\boldsymbol{\dfrac{3}{2}ka^2}$ …(答)

【解法 2】外力がする仕事はばねの弾性エネルギーの変化と考えられるので，

【非保存力がする仕事】＝【後の力学的エネルギー】－【初めの力学的エネルギー】

$=\dfrac{1}{2}k(2a)^2-\dfrac{1}{2}ka^2=\boldsymbol{\dfrac{3}{2}ka^2}$ …(答)

112 一端が壁に固定されたばね定数 k のばねの他端に外力を加え，次の (1),(2) のようにばねをゆっくり変化させたとき，外力がする仕事 W を求めなさい。

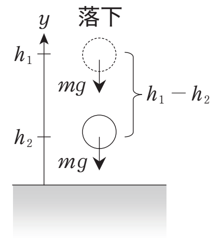
(1) 自然長から a だけ縮め，その後自然長から $3a$ だけ伸びた状態にゆっくり変化させる。

(　　　　　)

(2) 自然長から a だけ縮んだ状態から $3a$ だけ縮んだ状態にゆっくりと変化させる。

(　　　　　)

保存力がする仕事

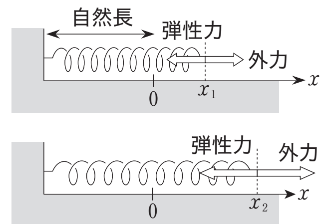


右図のように，質量 m の物体が h_1 の高さから h_2 の高さまで落下したとする。このとき重力がする仕事は，次のように求められる。

重力がする仕事 $=mg(h_1-h_2)=mgh_1-mgh_2$

mgh_1 は初めの位置エネルギーで，mgh_2 は後の位置エネルギーを表しているので，重力がする仕事は次のように求めることができる。

重力がする仕事＝【初めの位置エネルギー】－【後の位置エネルギー】



次に，右図のようにばね定数 k のばねに外力を加え，ゆっくり伸ばす場合を考える。このとき，外力と弾性力は大きさが等しく互いに逆向きであることに注意すると，弾性力がする仕事は次のように求めることができる。

弾性力がする仕事＝－【外力がする仕事】

＝－｛【後の力学的エネルギー】－【初めの力学的エネルギー】｝

＝【初めの力学的エネルギー】－【後の力学的エネルギー】

⚠ ばねの弾性力は必ず自然長に戻ろうとする向きにはたらく。

ゆっくり引いた場合，ばねの運動エネルギーは無視できるので，

上式＝【初めの位置エネルギー】－【後の位置エネルギー】

$=\dfrac{1}{2}kx_1^2-\dfrac{1}{2}kx_2^2$

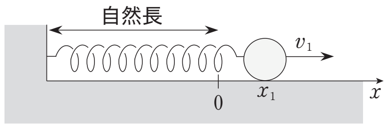
⚠ ばねを縮めても，弾性力と外力は互いに逆向きになるので同じ結果になる。

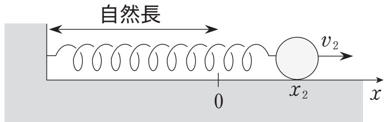
一般に，保存力がする仕事は次のように求めることができる。

【保存力がする仕事】＝【初めの位置エネルギー】－【後の位置エネルギー】

⚠ 一般性を示す導出は高度な計算が必要なため，現段階では行えない。

水平ばね振り子の運動





右図のように，ばねの一端に固定されたおもりが水平方向に振動するような振り子を**水平ばね振り子**という。水平ばね振り子において，おもりと接触する水平面は滑らかで，ばねは軽く，ばねのばね定数を k，おもりの質量を m とする。また，ばねが自然長のときのおもりの位置を原点として，水平右向きに x 軸をとる。このおもりを振動させ，おもりの位置が x_1, x_2 のときのおもりの速さをそれぞれ v_1, v_2 とする。おもりの位置が x_1 から x_2 へ移る間に保存力（弾性力）がする仕事を求めると，

保存力（弾性力）がする仕事＝【初めの位置エネルギー】－【後の位置エネルギー】

$$= \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2$$

また，運動エネルギーと外力がする仕事の関係により，

【初めの運動エネルギー】＋【外力がする仕事】＝【後の運動エネルギー】であり，

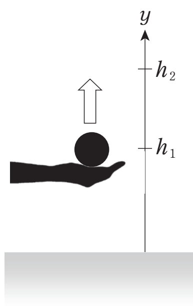
このときの外力は保存力（弾性力）であるので，$\frac{1}{2}mv_1^2 + \left(\frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2\right) = \frac{1}{2}mv_2^2$

⚠ 水平面は滑らかなので，おもりが水平面から受ける摩擦力 (外力) は無視できる。

上式を整理すると，$\boxed{\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2}$

この左辺と右辺はそれぞれ前後での【運動エネルギー】＋【位置エネルギー】，つまり力学的エネルギーであり，前後で力学的エネルギーが保存されることを表している。

113 図のように質量 m の物体を手で地上から h_1 の高さから h_2 の高さへ持ち上げた。これについて，重力加速度の大きさを g として，次の選択肢や空欄を正しく選択もしくは埋めなさい。



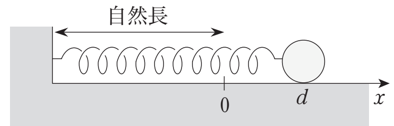
物体が移動した距離は $\boxed{ア}$ で，物体にはたらく重力の大きさは常に $\boxed{イ}$ である。重力の向きと物体の移動の向きとの成す角は $\boxed{ウ}$°であることに注意すると，このとき重力がした仕事は，$\boxed{エ}$ － $\boxed{オ}$ である。
よって，重力がする仕事は，
【カ． 初め・後　の重力による位置エネルギー】－【キ． 初め・後　の重力による位置エネルギー】のように求めることができる。このように力のする仕事が始点と終点だけで決まるとき，その力を $\boxed{ク}$ という。

ア.(　　　)　イ.(　　　)　ウ.(　　　)　エ.(　　　)
オ.(　　　)　カ.(　　　)　キ.(　　　)　ク.(　　　)

114 保存力である力を次の中からすべて選び，記号で答えなさい。(　　　　　)

ア．動摩擦力　イ．静止摩擦力　ウ．垂直抗力　エ．重力
オ．浮力　カ．糸の張力　キ．ばねの弾性力

115 図のように，一端を固定したばね定数 k〔N/m〕のばねを，滑らかな水平面上に置き，もう一端に質量 m〔kg〕の小物体をつないだ。自然長のばねの端を原点として水平右向きに x 軸をとり，物体を $x = d$〔m〕($d > 0$) の位置までゆっくり手で引き伸ばした後，静かに手を離した。ばねの質量は小さく無視できるものとして，次の問いに答えなさい。



(1) 自然長の状態から，物体を $x = d$〔m〕の位置までゆっくり手で引き伸ばしたとき，弾性力がした仕事を求めなさい。

(　　　　　)〔J〕

(2) 手を静かに離してから，ばねが最初に自然長に戻るまでに弾性力がした仕事を求めなさい。

(　　　　　)〔J〕

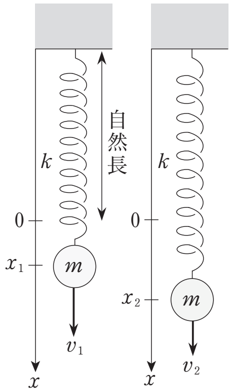
(3) 手を静かに離してから，最初に自然長に戻ったときの物体の速さを求めなさい。

(　　　　　)〔m/s〕

07

鉛直ばね振り子の運動

右図のように，ばねの一端に固定されたおもりが鉛直方向に振動するような振り子を**鉛直ばね振り子**という。図のように質量 m のおもりの位置が x_1, x_2 のときのおもりの速さをそれぞれ v_1, v_2 とし，重力による位置エネルギーの基準を原点とする。おもりの位置が x_1 から x_2 へ移る間に保存力（弾性力と重力）がする仕事を求めると，



【保存力がする仕事】

＝【初めの位置エネルギー】－【後の位置エネルギー】

$$=\left\{\frac{1}{2}kx_1^2+mg(-x_1)\right\}-\left\{\frac{1}{2}kx_2^2+mg(-x_2)\right\}$$

また，運動エネルギーと外力がする仕事の関係により，

【初めの運動エネルギー】＋【外力がする仕事】＝【後の運動エネルギー】

で, このときの外力は保存力（弾性力と重力）だけであるので,

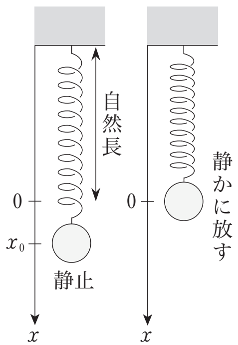
$$\frac{1}{2}mv_1^2+\left\{\frac{1}{2}kx_1^2+mg(-x_1)\right\}-\left\{\frac{1}{2}kx_2^2+mg(-x_2)\right\}=\frac{1}{2}mv_2^2 \quad \text{よって，}$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}kx_1^2+mg(-x_1)=\frac{1}{2}mv_2^2+\frac{1}{2}kx_2^2+mg(-x_2)}$$

この左辺と右辺はそれぞれ前後での（**運動エネルギー**）＋（**位置エネルギー**），つまり**力学的エネルギー**であり，**前後で力学的エネルギーが保存される**。

⚠ x 軸が鉛直上向きであれば, $mg(-x_1)$ や $mg(-x_2)$のマイナスが不要になることを理解しよう！

116 一端が天井に固定されたばね定数 k の軽いばねが天井に吊るされている。このばねのもう一端に質量 m の物体を取り付けると，ばねは自然長から x_0 だけ伸びて物体は静止した。図のようにばねが自然長のときのばねの下端の高さを原点として鉛直下向きに x 軸をとり，物体の重力による位置エネルギーの基準を $x=0$ とし，重力加速度の大きさをgとして, 次の問いに答えなさい。



(1) x_0 をm, g, k を用いて表しなさい。また，このときの物体の重力による位置エネルギーを m, g, k を用いて表しなさい。

x_0 ＝ (　　　　), 重力による位置エネルギー：(　　　　)

次に，ばねが自然長になるように物体を持ち上げて静かに放すと，物体は $x=x_0$ を中心に上下に振動した。

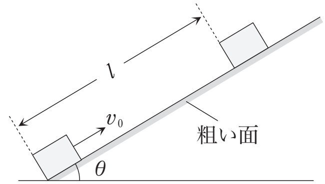
(2) $x=x_0$ を通過するときの物体の速さを m, g, k を用いて表しなさい。ただし，x_0 は用いないこと。　　　　(　　　　)

(3) 物体の最下点の位置 (x 座標) を，x_0 だけを用いて表しなさい。x ＝ (　　　　)

非保存力がする仕事

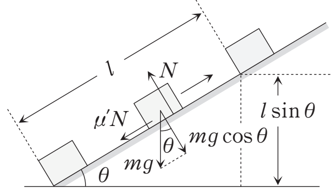
例題 5

図のように，水平面に対する傾き角 θ の粗い斜面の下端から, 物体を斜面に沿って速さ v_0〔m/s〕ですべり上がらせた。物体と斜面との間の動摩擦係数をμ'，重力加速度の大きさを g〔m/s²〕として次の問いに答えなさい。



(1) 斜面下端から物体が達する最高点までの，斜面に沿った距離 l〔m〕を求めなさい。

物体の質量を m，物体にはたらく垂直抗力，動摩擦力をそれぞれ N, R とすると，$N=mg\cos\theta$ であるので，$R=\mu'N=\mu'mg\cos\theta$ …①



【初めの力学的エネルギー】＋【非保存力がする仕事】

＝【後の力学的エネルギー】であるので，

水平面を重力による位置エネルギーの基準とすると，$\dfrac{1}{2}mv_0^2-Rl=mgl\sin\theta$

l について解くと，$l=\dfrac{mv_0^2}{2(R+mg\sin\theta)}$　これに①を代入すると，

$$l=\frac{mv_0^2}{2(\mu'mg\cos\theta+mg\sin\theta)}=\boldsymbol{\frac{v_0^2}{2g(\mu'\cos\theta+\sin\theta)}}\cdots(\text{答})$$

(2) 物体は最高点に達した後，直ちに斜面をすべり下り，下端まで戻ってきたとする。このとき，下端に戻ってきたときの物体の速さは，v_0 の何倍になるか求めなさい。

物体が斜面の下端に達するときの速さを v とすると，エネルギー保存則より，

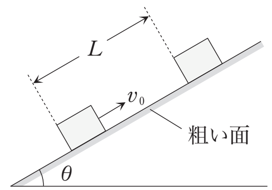
$mgl\sin\theta-Rl=\dfrac{1}{2}mv^2$　よって，$v^2=2gl\sin\theta-\dfrac{2Rl}{m}=2l\left(g\sin\theta-\dfrac{R}{m}\right)$

①と (1) の解より R, l を消去すると，

$$v^2=2\frac{v_0^2}{2g(\mu'\cos\theta+\sin\theta)}\cdot\left(g\sin\theta-\frac{\mu'mg\cos\theta}{m}\right)=\frac{\sin\theta-\mu'\cos\theta}{\sin\theta+\mu'\cos\theta}v_0^2$$

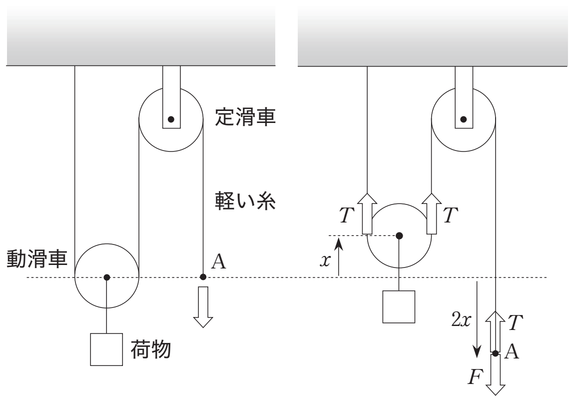
$v=\sqrt{\dfrac{\sin\theta-\mu'\cos\theta}{\sin\theta+\mu'\cos\theta}}v_0$ であるので，$\boldsymbol{\sqrt{\dfrac{\sin\theta-\mu'\cos\theta}{\sin\theta+\mu'\cos\theta}}}$〔倍〕…(答)

117 傾き角 θ の粗い斜面上に質量 m〔kg〕の物体を静か置き，斜面に沿って上向きに初速 v_0〔m/s〕を与えたところ，物体は斜面に沿って L〔m〕だけ滑って静止した。重力加速度の大きさを g〔m/s²〕として，物体と斜面との間の動摩擦係数 μ'を求めなさい。



(　　　　)

定滑車と動滑車



右図のように，軽く滑らかな糸と軽い定滑車と動滑車を組み合わせた装置を使うと，小さい力で荷物を持ち上げることができる。この装置には次のような特徴がある。

まず，図の点 A を $2x$〔m〕下に引くと，動滑車が上向きに x〔m〕引き上げられる。また，糸の張力を T とすると，動滑車は 2 本の糸で支えられているとみなすことができるので，動滑車には $2T$ の力が上向きにはたらく。

このことから，**【動滑車の変位】** $= -\dfrac{1}{2} \times$ **【点 A が下がる変位】**となり，

点 A と動滑車の同じ時間での変位，及び速度変化の関係も同じなので，次のことも成り立つ。

【動滑車の速度】 $= -\dfrac{1}{2} \times$ **【点 A の速度】**

【動滑車の加速度】 $= -\dfrac{1}{2} \times$ **【点 A の加速度】**

点 A を下向きに引く力の大きさを F とすると，この力と糸の張力は常につり合うので，

$$F = T \cdots ①$$

また，点 A の加速度を a，滑車の質量は無視でき，荷物の質量を m，重力加速度の大きさを g とすると，荷物と動滑車を一体とみなした物体についての鉛直方向の運動方程式は，

$$m \times \left(-\frac{a}{2}\right) = 2T - mg \cdots ②$$

と表すことができる。①，②より，T を消去すると，

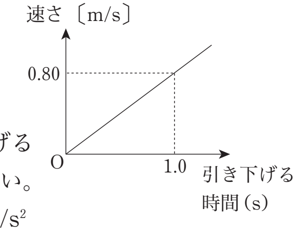
$$m \times \left(-\frac{a}{2}\right) = 2F - mg \cdots ③$$

ここで，点 A を一定の速さで引き下げたとき，$a = 0$ であるので，③式は

$$0 = 2F - mg \quad \text{つまり，} F = \frac{mg}{2}$$

となり，少なくとも荷物の重さの半分の力で荷物を引き上げることができる。

118 上の図の滑車について，次の問いに答えなさい。

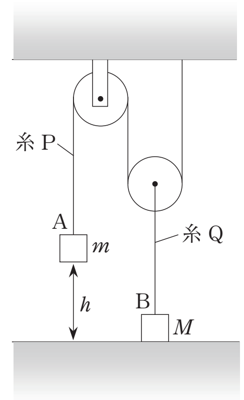


(1) 点 A を 1 秒間に 0.30 m だけ引き下げると，同じ 1 秒で荷物は何 m 上昇するか？（　　　　）m

(2) 点 A をグラフのように等加速度になるように引き下げるとき，点 A と荷物の加速度の大きさをそれぞれ求めなさい。

A：(　　　　) m/s²　荷物：(　　　　) m/s²

119 図のように，質量が無視でき，滑らかに回転する滑車を通して質量 m, M のおもり A, B を軽い糸で吊るし，B を手で押さえ，A と B を静止させた。このとき，A は床から h の高さにあり，B は床に接している。その後，B を静かに放すと，A は下降し，B は上昇した。A が床に衝突する直前の A と B の速さをそれぞれ v_A，v_B とし，重力加速度の大きさを g，重力による位置エネルギーの基準を床の高さとして，次の $\boxed{}$ 内を正しく埋めなさい。ただし，T' は用いず，オには言葉を入れること。



A が下降，B が上昇しているときの糸 P の張力を T, 動滑車の加速度の大きさを a, 糸 Q の張力を T' すると，動滑車の鉛直方向の運動方程式は，

$0 \cdot a = \boxed{ア} - T'$　よって，$T' = \boxed{ア}$ となる。

A が初めの位置から床に落下するまでの間に，A にはたらく重力と糸 P の張力がする仕事の合計は，$\boxed{イ}$ で, B にはたらく重力と糸 Q の張力がする仕事の合計は，$\boxed{ウ}$ であり，

（前の運動エネルギー）＋（外力がする仕事）＝（後の運動エネルギー）であるので，

$$\boxed{イ} = \frac{1}{2}mv_A{}^2 \cdots ① \qquad \boxed{ウ} = \frac{1}{2}Mv_B{}^2 \cdots ②$$

①，②より T を消去すると，$mgh = \dfrac{1}{2}mv_A{}^2 + \dfrac{1}{2}Mv_B{}^2 + \boxed{エ}$ …③ となる。

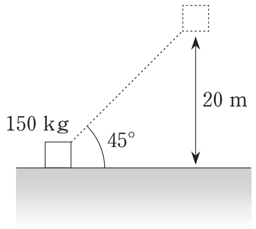
よって，A，B それぞれの力学的エネルギーは，非保存力である $\boxed{オ}$ がはたらくため保存されないが，力学的エネルギーの合計は保存される。ここで，この装置の性質により，$v_B = \boxed{カ}\, v_A$ となるので，③式から v_B を用いずに v_A を表すと，$v_A = \boxed{キ}$ となる。

ア .(　　　　)　イ .(　　　　)　ウ .(　　　　)　エ .(　　　　)

オ .(　　　　)　カ .(　　　　)　キ .(　　　　)

章　末　問　題

120 図のように，地上に置かれた 150 kg の物体を，クレーンで高さ 20 m まで吊り上げて静止させた。この間 70 秒の時間を要したとき，次の問いに答えなさい。ただし，重力加速度の大きさは 9.8 m/s^2 とし，有効数字は 2 桁で答えること。



(1) 物体が地上から 20 m の高さまで運ばれるまでに，重力が物体にした仕事を求めなさい。(　　　　　) J

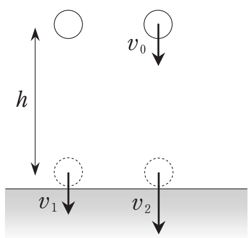
(2) 物体を吊り上げる力の仕事率を求めなさい。(　　　　　) W

121 高速のモーターボートがエンジンの推進力によって，5000 N の力を受けて，水面上を 8.0 m/s で一定の速さで走っている。次の問いに答えなさい。

(1) このボートが空気や水から受ける抵抗力の大きさを求めなさい。(　　　　　) N

(2) このときのエンジンの仕事率は何 kW か。(　　　　　) kW

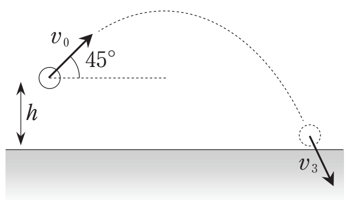
122 質量 m〔kg〕の小球を地上 h〔m〕の高さから，(1)～(3) のように放ったとき，地面に到達する直前のそれぞれの小球の速さ v_1, v_2, v_3 を求めなさい。ただし，重力加速度の大きさは g〔m/s^2〕とする。



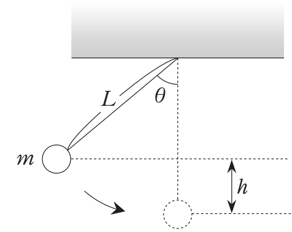
(1) 自由落下させる。(　　　　　)〔m/s〕

(2) 初速 v_0 で鉛直下向きに投げ下ろす。(　　　　　)〔m/s〕

(3) 水平から 45° 上向きに初速 v_0 で放つ。(　　　　　)〔m/s〕



123 図のように，軽くて伸び縮みしない長さ L〔m〕の糸の一端を天井に固定し，他端に質量 m〔kg〕の小さいおもりを取り付ける。さらに，おもりを手で持ち，糸を弛ませることなく鉛直から θ だけ傾け，おもりを静かに放した。重力加速度の大きさを g〔m/s^2〕として，次の問いに答えなさい。



(1) おもりを放してからおもりが最下点を通過するまでの間に，おもりにはどのような非保存力がはたらくか。また，その非保存力がする仕事を求めなさい。

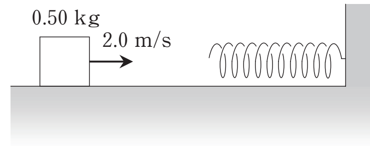
(2) おもりを放すときのおもりの高さと，最下点での高さの差 h を求めなさい。

(3) 最下点でのおもりの速さを求めなさい。

(1) (　　　　　), (　　　)〔J〕(2) (　　　　　)〔m〕(3) (　　　　　　　)〔m/s〕

07

124 図のように，滑らかな水平面上を速さ 2.0 m/s で等速直線運動をしている質量 0.50 kg の物体が，壁に固定されたばね定数 100 N/m のばねに当たってばねを縮め，その後物体は同じ直線上を逆向きに移動した。$\sqrt{2} = 1.414$ として有効数字 2 桁で次の問いに答えなさい。

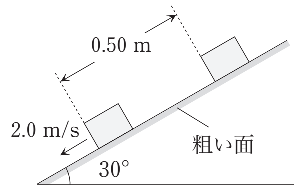


(1) ばねは自然長から最大で何 m 縮んだか。(　　　　　) m

(2) ばねが自然長から 0.10 m だけ縮んだときの物体の速さを求めなさい。

(　　　　　) m/s

125 図のように，傾き角 30° の粗い斜面上を，質量 4.0 kg の物体が静かに滑り出した。斜面に沿って距離 0.50 m だけ滑ったとき，物体の速さは 2.0 m/s であった。重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 として，次の問いに答えなさい。

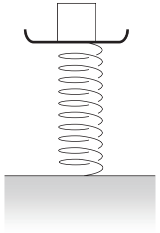


(1) この間に動摩擦力がした仕事 W〔J〕を求めなさい。

(2) 物体にはたらく動摩擦力の大きさ R〔N〕を求めなさい。

(1) (　　　　　)〔J〕(2) (　　　　　)〔N〕

126 図のように，ばねの一端が床に固定され，他端には質量が無視できる軽い皿が取り付けられている。皿の上に質量 5.0 kg の物体を静かに載せると，ばねは 0.10 m 縮んでつり合った。その後，皿を 0.30 m 押し下げ，皿を静かに放すと，物体は皿から離れ，鉛直上向きに飛び上がった。重力加速度の大きさは 9.8 m/s^2 とし，有効数字は 2 桁として次の問いに答えなさい。



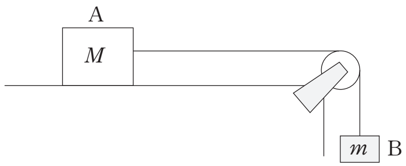
(1) ばねのばね定数を求めなさい。(　　　　　) N/m

(2) 皿を 0.30 m 押し下げてばねを縮めたときのばねの弾性エネルギーを求めなさい。

(　　　　　　　　) J

(3) 物体の最高点の高さは，皿を放した位置から何 m か。(　　　　　　　) m

127 図のように，水平面上に質量 M の物体 A があり，A は滑らかに回転する滑車を通して質量 m のおもり B と軽い糸で結ばれている。初め A を手で押さえておき，静かに A を放すと，糸は伸び縮みすることなく A は水平右向きに動き出した。重力加速度の大きさを g として，次の問いに答えなさい。

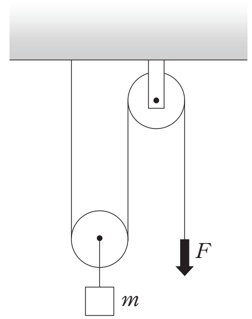


(1) A と水平面との間の摩擦が無視できるとき，B が h だけ落下したときの A の速さを求めなさい。

(2) A と水平面との間の動摩擦係数が μ であるとき，B が h だけ落下したときの A の速さを求めなさい。

(1) (　　　　　　　　　　　)　(2) (　　　　　　　　　　　)

128 図のように，動滑車と定滑車を組み合わせて質量 m〔kg〕の荷物を吊り上げる。伸び縮みしないひもの一端を天井に固定し，他端を一定の力 F〔N〕で引いたところ，荷物は上昇した。次の問いに答えなさい。ただし，滑車及びひもの質量は無視でき，滑車は滑らかに回転するものとする。また，重力加速度の大きさを g〔m/s^2〕とする。



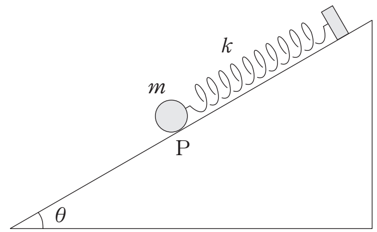
(1) 荷物の加速度の大きさはいくらか。(　　　　　　)〔m/s^2〕

(2) 糸に F〔N〕の力を加え始めてから，糸の端が x〔m〕だけ下がったときの荷物の速さを求めなさい。

(　　　　　　　　　)〔m/s〕

07

129 図のように，水平から θ だけ傾いた滑らかな斜面上に，ばね定数 k のばねの上端を固定し，下端に質量 m の物体を取り付けたところ，ばねが伸びて物体は点 P で静止した。その後，ばねが自然長になるように物体を P から斜面に沿って上方に引き上げ，静かに手を放すと，物体は下方へ滑り始めた。重力加速度の大きさを g として，次の問いに答えなさい。



(1) 物体が点 P で静止しているとき，ばねの自然長からの伸びを求めなさい。

(2) 重力による位置エネルギーの基準を，ばねが自然長のときの物体の高さとすると，P にあるときの物体の重力による位置エネルギーを求めなさい。

(3) 物体が P にあるときのばねの弾性エネルギーを求めなさい。

(4) 物体が滑り始めてから P に達したときの物体の速さを求めなさい。

(1)(　　　　　　) (2) (　　　　　　) (3)(　　　　　　) (4)(　　　　　　)