✣：数学的準備

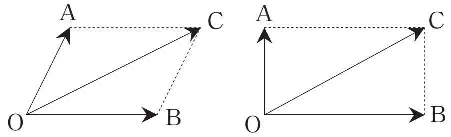
目　次

Chapter 01

物理で使う数学 I

ベクトルの暗記すべきパターン

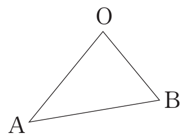
OACB が平行四辺形（長方形）であるとき，$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ の関係が成り立つ。



証明　$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$ で，AC = OB であるので，$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

OACB が平行四辺形なら，$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

△OAB では，$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ が成り立つ。



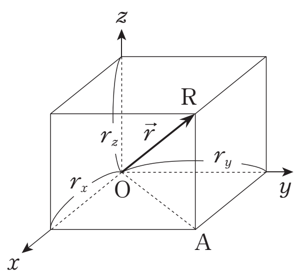
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

同じ点なら　（後）－（前）
何でもよい！ と覚えよう！

証明　$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ ⚠ O はどの位置にあってもよい！

座標空間と空間ベクトル



左図のように互いに直行する x 軸，y 軸，z 軸が設定された空間を**座標空間**といい，座標は（x 座標，y 座標，z 座標）のように表される。また，**空間ベクトル**は次のように定量化されている。

$\vec{r} = (x$ 成分$,y$ 成分$,z$ 成分$)$

例えば原点を O，点 R を (r_x, r_y, r_z)，$\overrightarrow{OR} = \vec{r}$ としたとき，その成分と大きさは次のように表すことができる。

$$\vec{r} = (r_x, r_y, r_z), \quad |\vec{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$$

$\mathrm{OA} = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$ であるので，

$\mathrm{OR} = \sqrt{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{AR}^2}$

$= \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$

成分計算も平面ベクトルと同様に行うことができる。

$\vec{a} = (1, -2, 3)$，$\vec{b} = (5, 7, -6)$ のとき，

例　$2\vec{a} + \vec{b} = 2(1, -2, 3) + (5, 7, -6)$

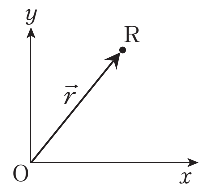
$= (2, -4, 6) + (5, 7, -6) = (7, 3, 0)$

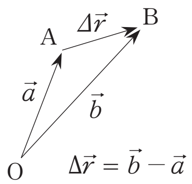
位置ベクトルと変位ベクトル

ある基準点 O から任意の点 R を定めるとき，O を始点として R を終点とするベクトルを点 O に関する R の**位置ベクトル**という。座標平面，座標空間においては，一般に原点を基準にすることがほとんどである。また，R の位置ベクトルは慣用的に $\vec{r}$ と表される。

また，ある点が A から B まで移動したとき，$\overrightarrow{AB}$ を変位ベクトルという。$\overrightarrow{AB} = \Delta r$ とし，O に関する A，B の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}, \vec{b}$ としたとき，$\Delta r = \vec{b} - \vec{a}$ と表すことができる。つまり次のことがいえる。

(変位ベクトル) = (後の位置ベクトル) − (前の位置ベクトル)

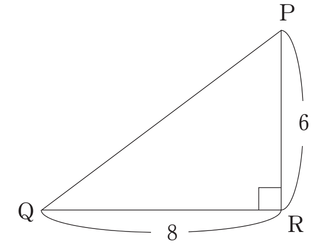




$\Delta\vec{r} = \vec{b} - \vec{a}$

1 図のように直角三角形 PQR がある。次の問いに答えなさい。

(1) 次の空欄に当てはまるベクトルを，符号や数値を用いず P,Q,R だけを用いて表しなさい。



$\overrightarrow{PQ} = \boxed{ア} - \boxed{イ}$　　$\overrightarrow{QR} = \boxed{ウ} - \boxed{エ}$

$\overrightarrow{QP} - \overrightarrow{QR} = \boxed{オ}$　　$\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{QP} = \boxed{カ}$

ア.（　　　）イ.（　　　）ウ.（　　　）

エ.（　　　）オ.（　　　）カ.（　　　）

(2) 次のベクトルの大きさを求めなさい。

① $|\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PR}|$ =（　　）② $|\overrightarrow{RP} + \overrightarrow{RQ}|$ =（　　）③ $|\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP}|$ =（　　）

2 原点が O である xyz 座標空間の点 P (0 , 0 , −3), Q (0 , 6 , 0), R (−1 , 0, 2) について，次の文中の（　）内を記号で選択しなさい。

・$\overrightarrow{OP}$ は ①（ ア . xy　イ . yz　ウ . xz ）平面と垂直である。（　　　）

・$\overrightarrow{OQ}$ は ②（ ア . xy　イ . yz　ウ . xz ）平面と垂直である。（　　　）

・$\overrightarrow{OR}$ は ③（ ア . xy　イ . yz　ウ . xz ）平面上にある。（　　　）

・$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$ のうち，$\overrightarrow{OR}$ と垂直なのは，

④（ ア . $\overrightarrow{OP}$ のみ，　イ . $\overrightarrow{OQ}$ のみ，　ウ . 両方 ）である。（　　　）

3 xyz 座標空間の点 A (−9 , 4 , 8)，B (−4 , 1 , 3) について次の空欄を埋めなさい。ただし，根号は用いたままでよいものとする。

・$\overrightarrow{AB}$ = ($\boxed{ア}$, $\boxed{イ}$, $\boxed{ウ}$) であるので，$|\overrightarrow{AB}|$ = $\boxed{エ}$ である。

・ある点が A から B まで移動したとき，$\overrightarrow{AB}$ は $\boxed{オ}$ ベクトルとみなすことができる。

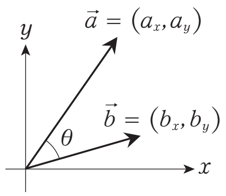
・座標空間の原点 O についての A,B の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}, \vec{b}$ とするとき，

$|\vec{a} - 2\vec{b}|$ = $\boxed{カ}$ である。

ア .（　　　）イ .（　　　）ウ .（　　　）エ .（　　　）オ .（　　　）カ .（　　　）

内積の定義

成す角が θ ($0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$) であるベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ において，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**内積**といい，**スカラー量**として次の式で定義されている。



$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$　※「・」は「ドット」と読む

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の成す角が 90° であるとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 90^\circ=0$ となる。
よって，<u>2 つのベクトルの内積が 0 ならば，2 つのベクトルは互いに垂直である。</u>

$\vec{a}=(a_x, a_y)$，$\vec{b}=(b_x, b_y)$ のとき，次の性質がある。

$$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y}$$

$\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$，$\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$ のときは，

$$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}$$

⚠ 力がする仕事 $Fr\cos\theta$ は内積を用いて $\vec{F}\cdot\vec{r}$ と表すことができる。

●内積のその他の性質

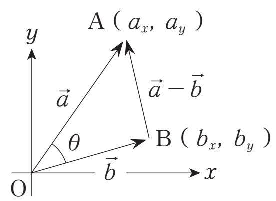
$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$

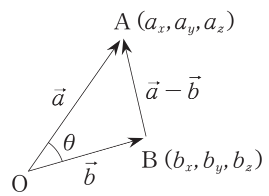
交換法則：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

分配法則：$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

4 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ は $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ と定義されているものとして，次の空欄を選択または埋めなさい。



原点を O とする xy 平面上に A (a_x, a_y)，B (b_x, b_y) をとり，
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とするとき，
$|\vec{a}|^2=a_x^2+a_y^2$ …①，　$|\vec{b}|^2=b_x^2+b_y^2$ …②
$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\vec{a}-\vec{b}=(a_x, a_y)-(b_x, b_y)=(a_x-b_x, a_y-b_y)$ であるので，
$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2=|\vec{a}-\vec{b}|^2=(a_x-b_x)^2+(a_y-b_y)^2$ …③
また，余弦定理より，$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ であり，
内積の定義 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ により，$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$
であるので，$a\cdot b=\dfrac{|a|^2+|b|^2-|a-b|^2}{2}$ …④
①，②，③，④より $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を a_x, a_y, b_x, b_y を用いて表すと，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{\text{ア}}$



同様に O, A, B を xyz 座標空間の点として，O (0, 0, 0)，A (a_x, a_y, a_z)，
B (b_x, b_y, b_z)，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とすると，
$|\vec{a}|^2=\boxed{\text{イ}}$，　$|\vec{b}|^2=\boxed{\text{ウ}}$，　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\boxed{\text{エ}})^2+(\boxed{\text{オ}})^2+(\boxed{\text{カ}})^2$
であるので，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2}{2}=\boxed{\text{キ}}$
なお，$\vec{a}\perp\vec{b}$ であるとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{\text{ク}}$ で，④より，$|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=\boxed{\text{ケ}}$ となり，これは $\boxed{\text{コ}}$ の定理を表している。

ア . (　　　　　　　) イ . (　　　　　　　) ウ . (　　　　　　　) エ . (　　　　　　　)

オ . (　　　　　　　) カ . (　　　　　　　) キ . (　　　　　　　　　　) ク . (　　　　)

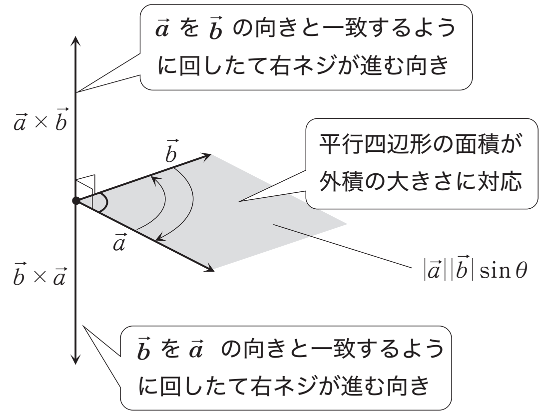
ケ . (　　　　　　　) コ . (　　　　　　　)

外積の定義

成す角が θ ($0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$) である空間ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ において，$\vec{a}\times\vec{b}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**外積**といい，**ベクトル量**として次のように定義されている。

$\boldsymbol{\vec{a}\times\vec{b}}$ ―
- 大きさ：$\boldsymbol{|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta}$
- 向き：$\boldsymbol{\vec{a}}$ を $\boldsymbol{\vec{b}}$ の向きと一致するように回したて右ネジが進む向き

⚠「×」は「クロス」と読む
⚠ $\vec{a}\times\vec{b}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を含む平面に垂直である
⚠ 遠回りをして $\vec{a}$ を 回してはいけない



⚠ 上図より，$\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$
つまり交換法則が成り立たない

⚠ 後で学習する力のモーメントは $\vec{r}\times\vec{F}$ と外積で定義されている。その他，ローレンツ力は $q\vec{v}\times\vec{B}$，電磁力は $L\vec{I}\times\vec{B}$ と表すことができ，外積は公式を覚えるために重要である。

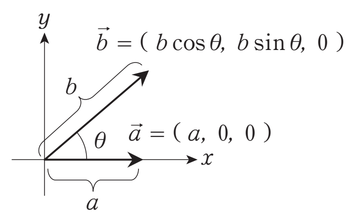
5 外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ の大きさは $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ と定義されているものとして，次の空欄を選択または埋めなさい。

$\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$，$\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の成す角を θ ($0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$) をとする。
三角比の性質 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ 及び，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき $\sin\theta \geqq 0$
であることに注意すると，$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$　従って，

$$
\begin{aligned}
|\vec{a}\times\vec{b}| &= |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta}\\
&=\sqrt{\left(|\vec{a}||\vec{b}|\right)^2-\left(|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\right)^2}=\sqrt{\left(|\vec{a}||\vec{b}|\right)^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}\\
&=\sqrt{\left(a_x^2+a_y^2+a_z^2\right)\left(b_x^2+b_y^2+b_z^2\right)-\left(a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\right)^2}\\
&=\sqrt{\left(a_yb_z-a_zb_y\right)^2+\left(a_zb_x-a_xb_z\right)^2+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)^2}\cdots(\text{Ⅰ})
\end{aligned}
$$

ここで，$\vec{a}\times\vec{b}=\left(a_yb_z-a_zb_y,\ a_zb_x-a_xb_z,\ a_xb_y-a_yb_x\right)\cdots(\text{Ⅱ})$ と定義すると，これは (Ⅰ) を満たし，外積の大きさの定義に矛盾しない。また，$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}=(\boxed{①})$ $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{b}=(\boxed{②})$ であるので，$\vec{a}$, $\vec{b}$ の始点が一致するとき，$\vec{a}\times\vec{b}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を含む平面と③ (平行・垂直) である。
次に，右図のように $\vec{a}=(a,\ 0,\ 0)$，$\vec{b}=(b\cos\theta,\ b\sin\theta,\ 0)$ ($a>0,\ b>0, 0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$) とすると，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の成す角は θ で，ともに xy 平面上にある。
このとき（Ⅱ）の定義によって $\vec{a}\times\vec{b}$ を計算すると，

$$\vec{a}\times\vec{b}=(\ \boxed{④}\ ,\ \boxed{⑤}\ ,\ \boxed{⑥}\ )$$



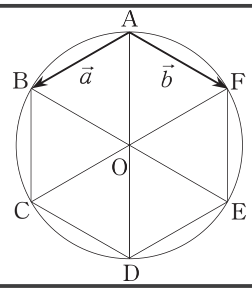
※ z 軸は紙面裏から表向き

よって，$\vec{a}\times\vec{b}$ は原点を始点として z 軸の⑦ (正・負) の向きで，これは $\vec{a}$ を $\vec{b}$ の向きと一致するように回して⑧ (右・左) ねじが進む向きである。このことから $\vec{b}\times\vec{a}$ は $\vec{b}$ を $\vec{a}$ の向きと一致するように回して (⑧) ねじが進む向きであるので，$\vec{a}\times\vec{b}$ と $\vec{b}\times\vec{a}$ は平行で，⑨（ア . ともに同じ向き，イ . 互いに逆向き）である。

①(　　)②(　　)③(　　)④(　　)⑤(　　)⑥(　　)⑦(　　)⑧(　　)⑨(　　)

例題 1

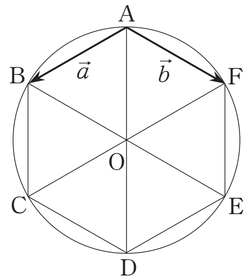
円 O に内接する正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{BD}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表しなさい。



$\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{ED}=\vec{a}$ $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{CD}=\vec{b}$ であることに注意すると，$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{ED}=2\vec{b}+\vec{a}=\vec{a}+2\vec{b}$

別解 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}=\vec{b}+\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}+2\vec{b}$

6 円 O に内接する正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表しなさい。



(1) $\overrightarrow{BC}=$ (　　　　　　　　)　(2) $\overrightarrow{CE}=$ (　　　　　　　　)

(3) $\overrightarrow{CF}=$ (　　　　　　　　)　(4) $\overrightarrow{AE}=$ (　　　　　　　　)

例題 2

次の 2 つのベクトル $\vec{a},\vec{b}$ の成す角 θ ($0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$) は何度か。

(1) $\vec{a}=(1,\ 2)$, $\vec{b}=(-1,\ 3)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times(-1)+2\times3=5$

$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

$|\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$ より，

$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}\times\sqrt{10}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって，$\theta=45^\circ$ …(答)

(2) $\vec{a}=(3,-2)$, $\vec{b}=(2,\ 3)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times2+(-2)\times3=0$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$ より，

$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\dfrac{0}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=0$

よって，$\theta=90^\circ$ …(答)

7 次の 2 つのベクトル $\vec{a},\vec{b}$ の成す角 θ ($0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$) は何度か。

(1) $\vec{a}=(2,-1)$, $\vec{b}=(2,\ 4)$ (　　　)°　(2) $\vec{a}=(1,-3)$， $\vec{b}=(1,\ 2)$ (　　　)°

(3) $\vec{a}=(2,\ 4)$， $\vec{b}=(-1,\ -2)$ (　　　)°　(4) $\vec{a}=(1,\ 0,\ 1)$, $\vec{b}=(1,\ 1,\ 0)$ (　　　)°

章　末　問　題

8 $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ の成す角が 60° で $|\vec{v}_1|=|\vec{v}_2|=10$ であるとき，次の問いに答えなさい。ただし，根号は用いたままでよいものとする。

(1) $\vec{v}_3=\vec{v}_2-\vec{v}_1$ とするとき，$\vec{v}_3$ を図 1 に書き入れ，$\vec{v}_3$ の大きさを求めなさい。(　　)

(2) $\vec{v}_4=\vec{v}_1+\vec{v}_2$ とするとき，$\vec{v}_4$ を図 2 に書き入れ，$\vec{v}_4$ の大きさを求めなさい。(　　)

図 1

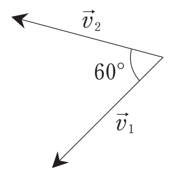
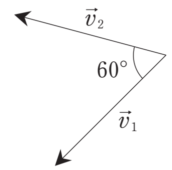
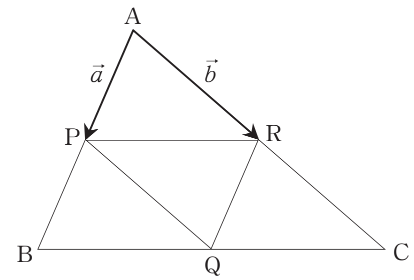


図 2



9 △ABC の辺 AB，辺 BC，辺 CA の中点をそれぞれ P，Q，R とする。次の問いに答えなさい。



(1) $\overrightarrow{AP}$と等しいベクトルをすべて答えなさい。

(　　　　　　　　　　　　　　　　)

(2) $\overrightarrow{AR}$と等しいベクトルをすべて答えなさい。

(　　　　　　　　　　　　　　　　)

(3) $\overrightarrow{AP}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AR}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表しなさい。

① $\overrightarrow{QA}=$ (　　　　)　② $\overrightarrow{BC}=$ (　　　　)

③ $\overrightarrow{BR}=$ (　　　　)　④ $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{CR}=$ (　　　　)

10 次の文中の (　) を選択または埋めなさい。ただし，根号は用いたままでよいものとする。

$\vec{a}=(0\ ,0\ ,\ 1)$, $\vec{b}=(2\ ,0\ ,\ 0)$ のとき, $|\vec{a}-\vec{b}|$ =① (　　), $\vec{a}\cdot\vec{b}=$ ② (　　), $|\vec{a}\times\vec{b}|=$ ③ (　　) で，$\vec{a}\times\vec{b}$ の向きは xyz 座標空間の原点を始点としたとき，④ (x,y,z) 軸の⑤ (正・負) の向きと一致する。

① (　　) ② (　　) ③ (　　) ④ (　　) ⑤ (　　)

11 ある小球が一定の力 $\vec{F}$ を受けたところ, xyz 座標空間を A から B まで直進した。$\overrightarrow{AB}=\Delta\vec{r}$ とするとき，力 $\vec{F}$ がした仕事はどのように表すことができるか。次から記号で選択しなさい。ただし，$\vec{F}$ と $\Delta\vec{r}$ は平行でないものとする。

ア . $|\vec{F}|\,|\Delta\vec{r}|$　イ . $\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$　ウ . $|\vec{F}\times\Delta\vec{r}|$　エ . $\dfrac{\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}}{|\vec{F}|\,|\Delta\vec{r}|}$　(　　)

Chapter 04

剛体のつり合い

質点と剛体

質量があり，大きさが無視できる物体を**質点（しつてん）**といい，大きさがあり，力を加えても変形しないような物体を**剛体**という。

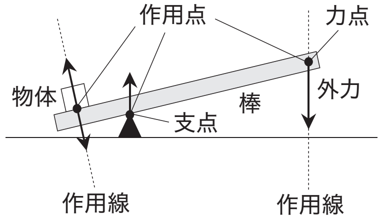
並進運動と回転運動

剛体の運動には剛体の各点が平行移動する**並進運動**と，ある 1 点を中心に剛体の各点が回転する**回転運動**がある。剛体の運動はどんなに複雑でもこの 2 つの運動の組み合わせになっている。

力点と作用点

物体に力を加える点を**力点**といい，1 つの物体に注目したときに，その物体が外から力を受ける点を**作用点**という。また，作用点を通り，受ける力の向きに引いた線を**作用線**という。

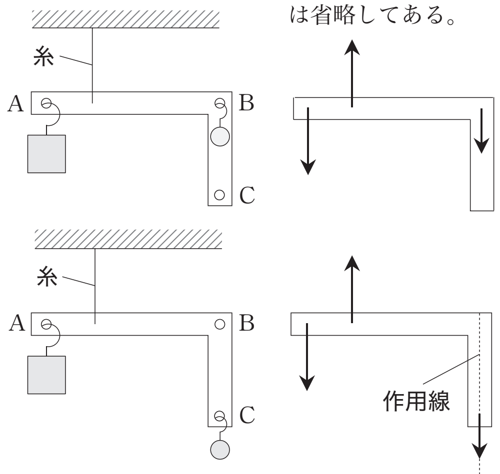
右図のてこの場合を考えてみよう。棒に対して力を加える点が力点になる。持ち上げられる物体に注目すると，物体は棒から抗力を受けるため，抗力を受ける点が作用点になる。また，棒に注目した場合は，棒にはたらく外力の始点や，物体から受ける抗力の始点，支点から受ける抗力の始点などがすべて作用点になる。このように，注目する物体によって様々な点が作用点になるので注意しよう。



作用線の定理

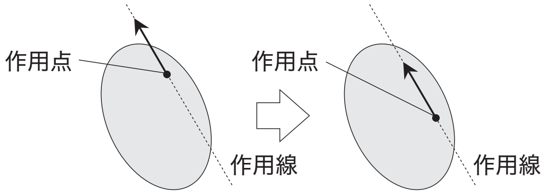
右図のように，直角に折れ曲がった軽い剛体の両端におもりが吊るされていて，AB が水平に保たれていたとする。この剛体を手でおさえ，B の位置に吊るされたおもりを C に移して手を離すと，剛体は回転することなく AB は水平に保たれる。このように，剛体にはたらく力は作用線上で移動させても，物体を回転させる効果が変わらない性質があり，力の大きさと向きが変わらなければ，作用点を作用線上のどこに動かして考えてもよい。これを**作用線の定理**という。

⚠ 剛体にはたらく重力は省略してある。



暗記

【作用線の定理】
剛体に加わる力をその作用線上で移動させても，物体を回転させる効果は変わらない



力のモーメントとは

図 1

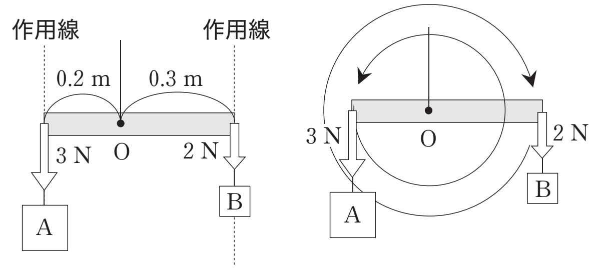


図 1 のように，軽く一様な棒の両端におもり A，B を取り付け，棒上の点 O に糸をかけて天井から棒を吊るすと，棒は水平に保たれたまま静止した。このときのおもり A，B が棒に及ぼす回転作用を考える。点 O を回転軸とするとき，A は左回り，B は右回りの回転作用を与えており，それらがつり合って棒は回転せずに静止している。このような回転作用は**力のモーメント**という物理量で定義されており，**回転軸と力の作用線との距離**を「**腕の長さ**」として，大きさが次のように表される。

力のモーメントの大きさ ＝（腕の長さ）×（力の大きさ）

特に回転軸を点 O と決めたときの回転作用を，**点 O のまわりの力のモーメント**という。従って，

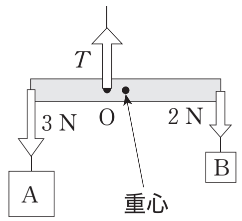
おもり A が及ぼす点 O のまわりの力のモーメントの大きさ＝ $0.2\ \mathrm{m} \times 3\ \mathrm{N} = 0.6\ \mathrm{N{\cdot}m}$

おもり B が及ぼす点 O のまわりの力のモーメントの大きさ＝ $0.3\ \mathrm{m} \times 2\ \mathrm{N} = 0.6\ \mathrm{N{\cdot}m}$

一般に右回りの力のモーメントの和と，左回りの力のモーメントの和が等しいとき，剛体は回転しないことが知られている。ここで，左回りの力のモーメントを正，右回りの力のモーメントを負と決めると，剛体にはたらく力のモーメントの総和は 0 になる。
つまり，**（棒にはたらく力のモーメントの総和）** $= 0.2 \times 3 - 0.3 \times 2 = 0$ である。

なお，A，B が及ぼす作用は並進作用もあり，**力の並進作用は剛体の重心に加速度を与える**ことが知られている。従って，剛体の重心の加速度を用いて運動方程式を立てることもできる。（一様な棒の重心は，棒の中央にある。重心の詳細は後述する）

図 1 の場合，棒の質量を m，点 O にかけられた糸の張力を T とすると，棒の重心の加速度は 0 であるので，鉛直方向の運動方程式は次のようになる。



⚠ 剛体は静止しているので重心の加速度は $\vec{0}$

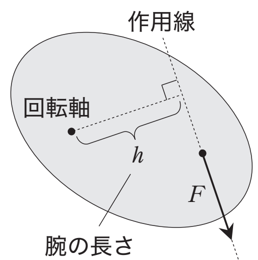
$$m \cdot 0 = T - 3\ \mathrm{N} - 2\ \mathrm{N}$$

暗記

点 O のまわりの力のモーメントの大きさ：$M = hF$〔N·m〕

h：腕の長さ〔m〕　F：はたらく力の大きさ〔N〕

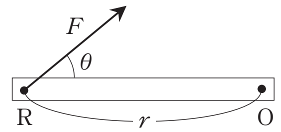
左回りの力のモーメントを正としたとき，右回りの力のモーメントを負とする。1 つの剛体に複数の力がはたらくとき，点 O のまわりの力のモーメントを $M_1, M_2, M_3 \cdots$ とすると，点 O を軸に剛体が回転しないための条件は $M_1 + M_2 + M_3 + \cdots = 0$



04

例題 1

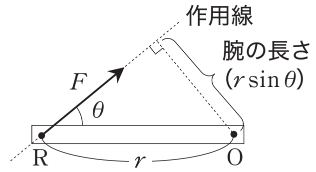
滑らかな水平面上に剛体が置かれていて，この剛体は点 O を軸に回転できるようになっている。図のように剛体上の点 R を力点として F〔N〕の力を加えたとき，剛体にはたらく点 O のまわりの力のモーメントの大きさを求めなさい。



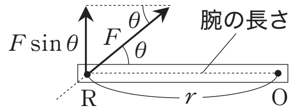
腕の長さは作用線と回転軸との距離であるので，図の $\mathrm{OS} = r\sin\theta$ が腕の長さ。

よって，求める力のモーメントの大きさは，

$(r\sin\theta)\times F = \boldsymbol{rF\sin\theta}$ …(答)



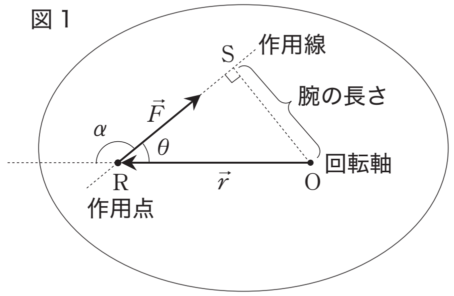
別解　OR と垂直な方向の分力 $F\sin\theta$ の腕の長さは OR と考えることもできる。よって，力のモーメントの大きさ $= r\times F\sin\theta = \boldsymbol{rF\sin\theta}$



★外積による力のモーメントの定義

図 1 のように，剛体にはたらく力を $\vec{F}$，始点が回転軸 O，終点が作用点 R であるベクトルを $\vec{r}$ とするとき，力のモーメントは外積で次のように定義されている。

図 1



$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}$（×は外積を表す）

⚠ 外積については p7「外積の定義」参照
外積は交換法則が成り立たないため，
$\vec{M} = \vec{F}\times\vec{r}$ と覚えてはいけない。$(\vec{F}\times\vec{r} = -\vec{r}\times\vec{F})$

この力の大きさを考えてみよう。

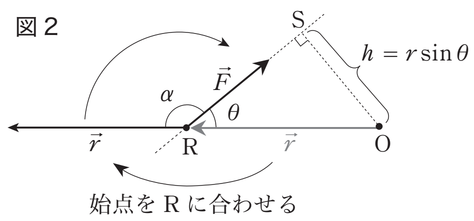
図 2 のように，$\vec{F}$ と $\vec{r}$ の始点をそろえたときの成す角を α，$\angle\mathrm{ORS} = \theta$ とする。

$\alpha = 180^\circ - \theta$ より，$\sin\alpha = \sin\theta$ であることに注意すると，

$|\vec{r}\times\vec{F}| = rF\sin\alpha = rF\sin\theta$

これは例題 1 の結果に一致する。

図 2



$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}$ は紙面表向きから裏向き

次に $\vec{M}$ の向きについて考えてみよう。外積の定義により，$\vec{r}$ と $\vec{F}$ の始点をそろえ，その始点を軸として $\vec{r}$ を $\vec{F}$ と重なるように回し，右ねじが進む向きが $\vec{M}$ の向きである。これは $\vec{r}$ と $\vec{F}$ を含む平面に対して垂直であり，図 2 では紙面表から裏向きになる。 この向きによって，空間的な回転作用の方向が決まる。

複数の力が剛体に作用している場合は，力のモーメントのベクトル和を求めなければいけないが，平面ベクトルのみを扱う場合は，右回りや左回りを正としてその量を簡単に計算することができる。

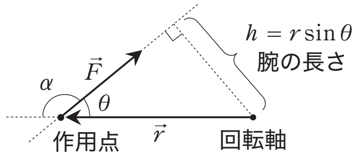
暗記

力のモーメント

$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}$

$M = rF\sin\theta = rF\sin\alpha$

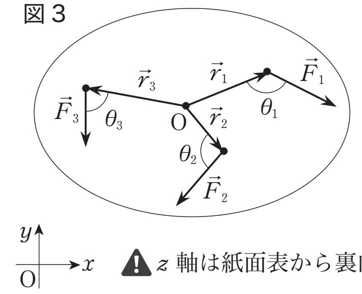
⚠ $\vec{r}$ の始点は必ず回転軸にする



●平面ベクトルである力のモーメントの和

図 3 のように剛体に力 $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ を加える場合を考える。これらの作用点はすべて xy 平面上にあり，各力は xy 平面と平行である。z 軸を紙面表から裏向きにとると，原点 O のまわりの各力のモーメントは，

図 3



⚠ z 軸は紙面表から裏向き

$\vec{M}_1 = \vec{r}_1\times\vec{F}_1$ …z 軸の正の向き（右回りの回転作用）

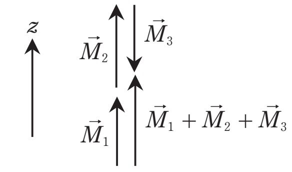
$\vec{M}_2 = \vec{r}_2\times\vec{F}_2$ …z 軸の正の向き（右回りの回転作用）

$\vec{M}_3 = \vec{r}_3\times\vec{F}_3$ …z 軸の負の向き（左回りの回転作用）

$\vec{M}_1, \vec{M}_2, \vec{M}_3$ はすべて z 軸に平行で，$\vec{M}_1, \vec{M}_2$ は z 軸の正の向き，$\vec{M}_3$ は z 軸の負の向きであり，各モーメントの x 成分，y 成分は 0 である。さらに，

$|\vec{M}_1| = r_1F_1\sin\theta_1, |\vec{M}_2| = r_2F_2\sin\theta_2, |\vec{M}_3| = r_3F_3\sin\theta_3$ であることに注意すると，

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 = (0, 0, r_1F_1\sin\theta_1) + (0, 0, r_2F_2\sin\theta_2) + (0, 0, -r_3F_3\sin\theta_3)$$
$$= (0, 0, r_1F_1\sin\theta_1 + r_2F_2\sin\theta_2 - r_3F_3\sin\theta_3)$$

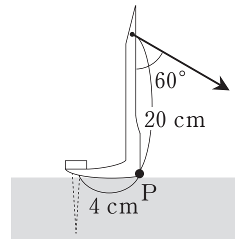


このように剛体に作用する力がすべて同一平面上にあるとき，z 成分のみを考慮し，右回りや左回りを正とみなして力のモーメントを計算することができる。

⚠ 上記のモーメントの z 成分は右回りの回転作用を正とみなすことができる。

59 次の問いに答えなさい。

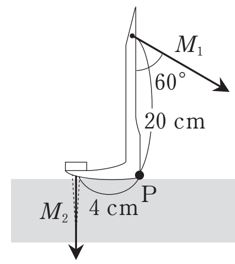
(1) 図の木材に打ち込んである釘を抜き取るには 50 N の力が必要である。支点を P とする釘抜きを使い，矢印の向きに力を加えると，加える力が約何 N を超えると釘は抜きとれるか。次の空欄を埋めることで求めなさい。(M_1 は三角比を用い，それ以外は有効数字 2 桁で答えること)



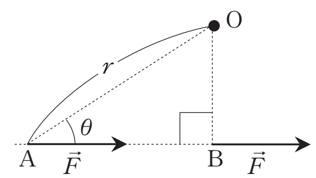
右図のように支点 P のまわりの力のモーメントを考える。加える力のモーメントを M_1，釘抜きが釘から受ける力のモーメントを M_2 とする。釘抜きがちょうど釘から 50 N の力を下向きに受けるときの加える力を x〔N〕とすると，そのとき釘抜きはぎりぎり回転しないので，$M_1 + M_2 = 0$ が成り立つ。左回りを正とすると，

$M_1 =$ (　　　　　) $\times x$〔N·m〕, $M_2 =$ (　　　　　)〔N·m〕

となるので，$x =$ (　　　　　)〔N〕と求められる。



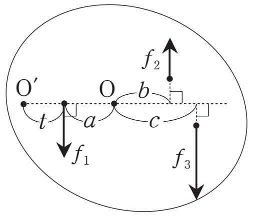
(2) 図のように剛体上に点 O，A，B があり，A と B に大きさ F の力を図に示す向きに加える。点 O を回転軸として，A，B に加える力のモーメントの大きさをそれぞれ $M_\mathrm{A}, M_\mathrm{B}$ とする。$M_\mathrm{A}, M_\mathrm{B}$ をそれぞれ F, r, θ を用いて表しなさい。また，求めた結果から成り立つと考えられる定理を答えなさい。



M_A：(　　　　　) M_B：(　　　　　)　定理：(　　　　　　　　　　)

例題 2

水平面上に，図のような硬い金属板が置かれている。この金属板に大きさが f_1, f_2, f_3 の力を図のように加えても，金属板が並進運動（位置が変わる運動）も回転運動もしないとき，f_2, f_3 をそれぞれ f_1, a, b, c を用いて表しなさい。



一般に剛体が並進運動も回転運動もしないとき，どこを回転軸にしても剛体にはたらく力のモーメントの和は 0 である。従って回転についてのつり合いの式は，どの点を回転軸にとってもよい。ただし，剛体が回転している場合は，実際の回転軸を考慮して回転についての運動方程式を立てる必要ある。（詳しくは大学で学習する）

【解法 1】 図の点 O を回転の中心として，力のモーメントのつり合いの式を立てて求める。

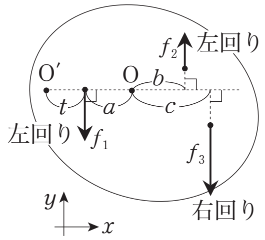
右のように xy 軸をとると，y 軸方向に並進運動しないためには，y 軸方向のつり合いの式より，$f_2 = f_1 + f_3$…①

また O のまわりの力のモーメントがつり合うとき，

$af_1 + bf_2 - cf_3 = 0$…②　①，②より，

f_3 を消去して f_2 について解くと，$f_2 = \dfrac{a+c}{c-b}f_1$…(答)

これを①に代入して f_3 について解くと，$f_3 = \dfrac{a+b}{c-b}f_1$…(答)



【解法 2】 図の点 O′を回転の中心として，力のモーメントのつり合いの式を立てる。

右のように xy 軸をとると，y 軸方向に並進運動しないためには，

$f_2 = f_1 + f_3$ よって　$-f_1 + f_2 - f_3 = 0$ …③

また O′ のまわりの力のモーメントがつり合うとき，

$-tf_1 + (t+a+b)f_2 - (t+a+c)f_3 = 0$　式変形すると，

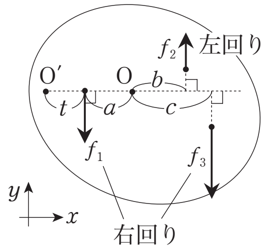
$-tf_1 + tf_2 + (a+b)f_2 - tf_3 - (a+c)f_3 = 0$

$t(-f_1 + f_2 - f_3) + (a+b)f_2 - (a+c)f_3 = 0$ となり，③より，

$(a+b)f_2 - (a+c)f_3 = 0$ …④ となる。③，④より，

f_3 を消去して f_2 について解くと，$f_2 = \dfrac{a+c}{c-b}f_1$…(答)

これを④に代入して f_3 について解くと，$f_3 = \dfrac{a+b}{c-b}f_1$ …(答)

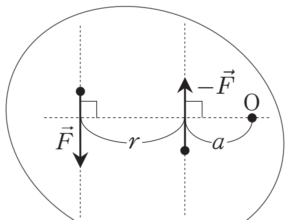


偶力のモーメント

右図のように，同一直線上になく，互いに平行で逆向きの大きさが等しい 2 つの力 $\vec{F}, -\vec{F}$ が 1 つの物体にはたらくとき，この力の組を偶力（ぐうりょく）という。<u>偶力は物体を並進運動させるはたらきはなく，回転運動させるはたらきしかない</u>。右図において，作用線上にない点 O のまわりの 2 つの力のモーメントの和を，左回りを正として求めると，

$$M = (r+a)F - aF = rF$$

よって偶力のモーメントの大きさは，**作用線間距離 ×｜片方の力｜** と表される。



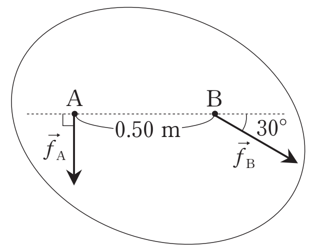
$a \neq 0$, $d \neq 0$

暗記

偶力のモーメントの大きさ：$M = rF$

重要 偶力のモーメントの大きさは回転軸を考慮することなく，作用線間距離 ×｜片方の力｜ で求めることができる。

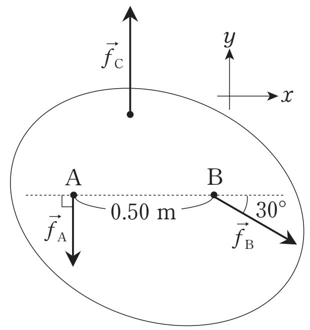
60 水平面上に図のような硬い金属板が置かれている。金属板上の点 A,B にそれぞれ f_A〔N〕，f_B〔N〕の力を図のように加えるとき，次の問いに答えなさい。ただし，力 $\vec{f_A}$, $\vec{f_B}$ の大きさをそれぞれ f_A, f_B とし，力のモーメントの大きさは左回りを正，右回りを負とする。



(1) 点 A のまわりの力 $\vec{f_A}$ のモーメントの大きさを M_A，点 A のまわりの力 $\vec{f_B}$ のモーメントの大きさを M_B とする。M_A, M_B をそれぞれ f_A, f_B を用いて表しなさい。

$M_A =$ (　　　　　　　)〔N·m〕　$M_B =$ (　　　　　　　)〔N·m〕

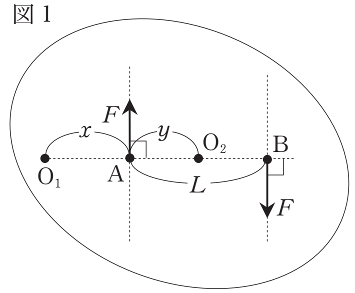
(2) 右図のように AB と x 軸が平行になるように xy 軸をとり，y 軸の正の方向に f_C〔N〕の力を加えて金属板を x 軸の向きに平行移動させたい。$f_A = 30$ N, $f_B = 40$ N であるとき，金属板を x 軸の向きに平行移動させるための点 A のまわりの力 $\vec{f_C}$ のモーメントの大きさ M_C，力 $\vec{f_C}$ の大きさ f_C，及びこのモーメントの腕の長さ x を求めなさい。ただし，有効数字は 2 桁で答えること。



$M_C =$ (　　　　) N·m　$f_C =$ (　　　　) N　$x =$ (　　　　) m

61 水平面上に薄く硬い金属板があり，金属板上の 2 点 A, B に F〔N〕の等しい力が平行で逆向きにはたらいている。次の問いに答えなさい。

図 1

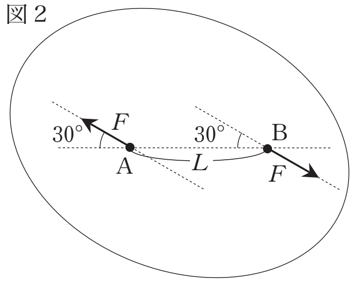


(1) 図 1 のように力がはたらいている場合，O_1 のまわりの力のモーメントの和の大きさ M_1，及び O_2 のまわりの力のモーメントの和の大きさ M_2 をそれぞれ求めなさい。ただし，どちらも左まわりを正とする。

$M_1 =$ (　　　　　　)〔N·m〕$M_2 =$ (　　　　　　)〔N·m〕

(2) 次の (　　) を正しく選択もしくは埋めなさい。

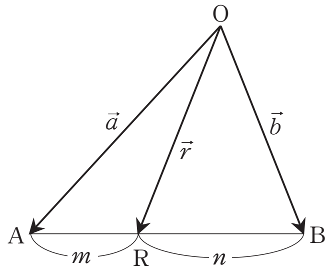
図 2



同一の作用線上になく，平行で，大きさが等しく，互いに逆向きの 2 力の組を① (　　　　　　　) といい，図 1 の場合の (①) のモーメントの大きさは② (　　　　　　　)〔N·m〕である。この (①) は剛体を③ (右 ・ 左) まわりに回転させる作用があり，④ (　　　　　　　) させる作用はない。図 2 のように (①) がはたらいている場合，(①) のモーメントの大きさは⑤ (　　　　　　　)〔N·m〕である。

内分点

△OAB の AB を $m:n$ に内分する点を R とし，O に関する A,B,R の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a},\vec{b},\vec{r}$ とするとき，次の式が成り立つ。



暗記

AB を $m:n$ に内分する点 R の位置ベクトル　$\vec{r}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$

証明

$$\vec{r}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$$

$$=\frac{m+n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}-\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OA}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$$

$$=\frac{n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m+n}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$$

例題 3

2 点 A(−4, 1), B(5, −2) を 2：1 に内分する点 R の座標を求めなさい。

原点 O に関する A,B,R の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{r}$ とすると，

A($\vec{a}$)　B($\vec{b}$) → **分子は斜めに掛けて和をとる**

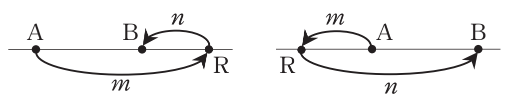
2　：　1 → **分母はこの和**

$$\vec{r}=\frac{1\vec{a}+2\vec{b}}{2+1}=\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}=\frac{(-4,1)+2(5,-2)}{3}$$

$$=\frac{(-4,1)+(10,-4)}{3}=\frac{(6,-3)}{3}=(2,-1)$$　よって，**P(2, −1)**…(答)

外分点

右図のように点 R は直線 AB 上にあり，線分 AB 上にない点で，AR：RB＝$m:n$ の関係が成り立っているとき，R は AB を $m:n$ に**外分**する点であるという。



A から m だけ進み，折り返して n だけ進んで B に到達するとき，折り返し点が外分点 R となる。

★外分点の位置ベクトル

△OAB の AB を $m:n$ に外分する点を R とし，O に関する A,B,R の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{r}$ とするとき，次の式が成り立つ。

暗記

AB を $m:n$ に外分する点 R の位置ベクトル　$\vec{r}=\dfrac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$

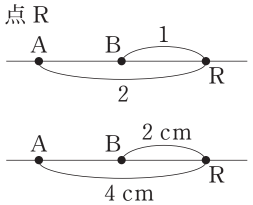
⚠ 証明は数学の教科書を参照

例題 4

次のような点 R を作図しなさい。ただし，AB は 2 cm とする。

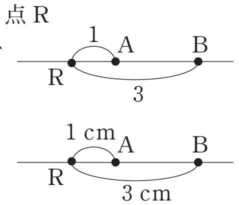
(1) AB を 2：1 に外分する点 R

AR：RB＝2：1 なので
おおまかな図を描くと
AB：BR＝1：1 となる
よって，BR＝2 cm と
求められる



(2) AB を 1：3 に外分する点 R

AR：RB＝1：3 なので
おおまかな図を描くと
RA：AB＝1：2 となる
よって，AR＝1 cm と
求められる



例題 5

2 点 A(−4, 1), B(5, −2) を 2：1 に外分する点 R の座標を求めなさい。

原点 O に関する A,B,R の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{r}$ とすると，

A($\vec{a}$)　B($\vec{b}$) → **分子は斜めに掛けて和をとる**

2　：　−1 → **分母はこの和**

$$\vec{r}=\frac{-1\vec{a}+2\vec{b}}{2-1}=\frac{-\vec{a}+2\vec{b}}{1}=\frac{-(-4,\ 1)+2(5,\ -2)}{1}$$

＝(14, −5)　よって，**R (14, −5)**…(答)

⚠ 2：−1 または −2：1 に内分すると考えればよい！どちらに−を付けても結果は同じ！

62 次の問いに答えなさい。

(1) A(−2, 3)，B(3, −1) を 2：3 に内分する点を P，4：1 に内分する点を Q とするとき，P, Q の座標をそれぞれ求めなさい。

P (　　　，　　　)　Q (　　　，　　　)

(2) 数直線上の 2 点 A(−3), B(5) を 3：1 に内分する点 P の座標を求めなさい。P (　　　)

(3) 2 点 P，Q を 2：3 に内分した点を R とする。P の座標が (−2, 1)，R の座標が (2, 3) であるとき，Q の座標を求めなさい。

Q (　　　，　　　)

04

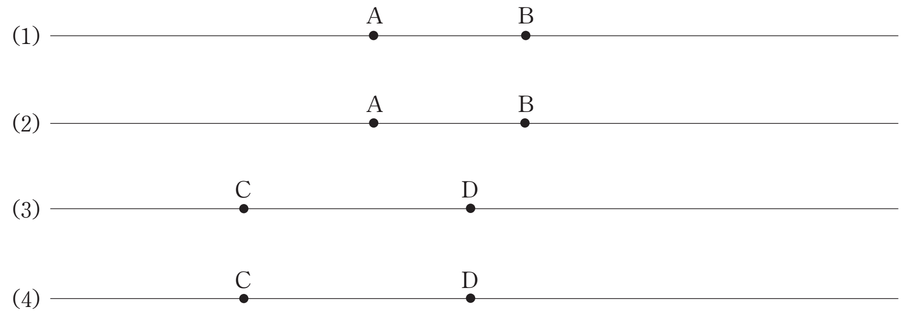
63 次のような点 P, Q を作図しなさい。ただし，AB は 2 cm，CD は 3 cm とする。

(1) AB を 3：2 に外分する点 P

(2) AB を 1：3 に外分する点 P

(3) CD を 3：1 に外分する点 Q

(4) CD を 1：7 に外分する点 Q



平行な２力の合成

本章「力のモーメントとは」（p43参照）でも学習したが，図１のように軽く一様な棒の両端におもりA，Bを取りつけ，棒上の点Oに糸をかけて天井から棒を吊るすと，棒は水平に保たれたまま静止する。

ここで図２のように，糸の張力を$\vec{T}$ (5 N)，おもりAによる作用を$\vec{f}_A$ (3 N)，その作用点をS_A，おもりBによる作用を$\vec{f}_B$ (2 N)，その作用点をS_Bとする。このとき，$\vec{f}_A$と$\vec{f}_B$の合力の作用点はどこになるのかを考えてみよう。

$\vec{f}_A$と$\vec{f}_B$の合力は$\vec{T}$と釣り合うと考えられるため，図３のように，作用点が$\vec{T}$と一致し，$\vec{T}$と大きさが等しく逆向きであると考えられる。この作用点はS_AS_Bを $2:3=f_B:f_A$ に内分した点になっている。

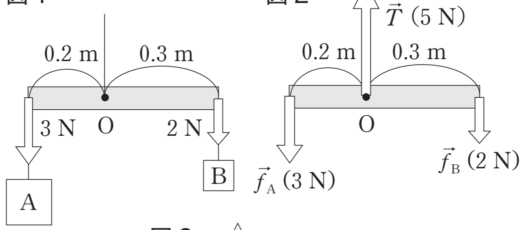
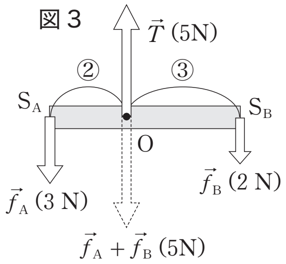
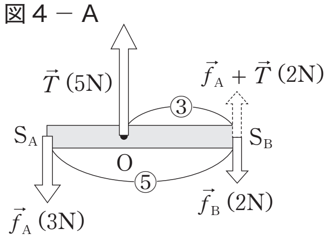
図１　図２


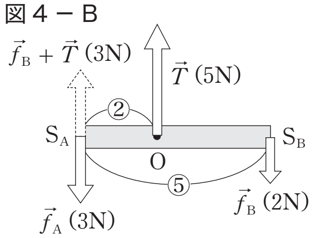
図３


$\vec{f}_A+\vec{f}_B$の作用点はS_AS_Bを２：３つまり，$f_B:f_A$（力の大きさの逆比）に内分した点

次に$\vec{f}_A$と$\vec{T}$の合力，$\vec{f}_B$と$\vec{T}$の合力について考えてみよう。$\vec{f}_A$と$\vec{T}$の合力は$\vec{f}_B$と釣り合うと考えられるため，図４－Aのように，作用点が$\vec{f}_B$と一致し，$\vec{f}_B$と大きさが等しく逆向きであると考えられる。この作用点はS_AOを$5:3=T:f_A$に外分した点になっている。同様に，$\vec{f}_B$と$\vec{T}$の合力は$\vec{f}_A$と釣り合うと考えられるため，図４－Bのように，作用点が$\vec{f}_A$と一致し，$\vec{f}_A$と大きさが等しく逆向きであると考えられる。この作用点はS_BOを$5:2=T:f_B$に外分した点になっている。

図４－A


$\vec{f}_A+\vec{T}$の作用点はS_AOを５：３つまり，$T:f_A$（力の大きさの逆比）に外分した点

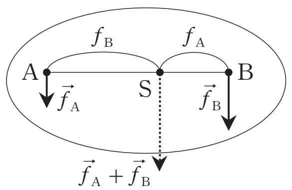
図４－B


$\vec{f}_B+\vec{T}$の作用点はS_BOを５：２つまり，$T:f_B$（力の大きさの逆比）に外分した点

暗記

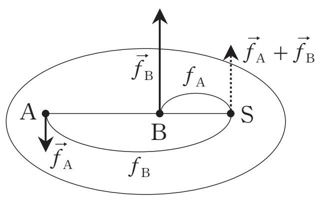
平行な２力$\vec{f}_A$, $\vec{f}_B$（作用点はそれぞれA,B）の合力の作用点をSとする

●$\vec{f}_A$, $\vec{f}_B$が同じ向きの場合



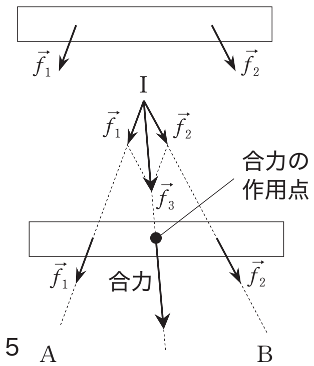
合力の作用点SはABを$f_B:f_A$に内分した点

●$\vec{f}_A$, $\vec{f}_B$が逆向きの場合



合力の作用点SはABを$f_B:f_A$に外分した点

剛体にはたらく２つの力の合成



右図のように，棒状の剛体に$\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$の力が加わっているとき，これらの合力を作用線の定理によって作図してみよう。

図のように$\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$それぞれの作用線の交点をIとし，Iを始点とするこれらの合力$\vec{f}_3$を作図する。次に$\vec{f}_3$を作用線に沿って移動し，始点が剛体上に来たところで止めると，剛体上にある合力の作用点と合力を作図することができる。

ここで図５のように，同じ向きの平行な２力$\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$がはたらく剛体を考える。各作用点A,Bを始点として$\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$に垂直な力$\vec{f}$, $-\vec{f}$を加えても，剛体の運動に影響しない。このときの合力は$\vec{F}=(\vec{f}_1+\vec{f})+(\vec{f}_2-\vec{f})=\vec{f}_1+\vec{f}_2$である。作用線の定理によって，$\vec{f}_1+\vec{f}$と$\vec{f}_2-\vec{f}$及び合力$\vec{F}$の作用線を作図し，$\vec{F}$の作用線とABとの交点をOとすると，△AIO∽△APQであるので，

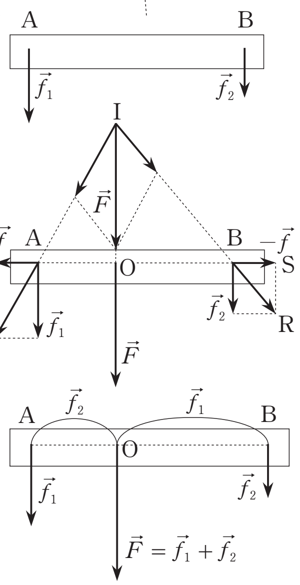
$\dfrac{AO}{AQ}=\dfrac{IO}{PQ}$ よって，$\dfrac{AO}{f}=\dfrac{IO}{f_1}$ つまり $AO=\dfrac{f}{f_1}IO$ …①

また，△BIO∽△BRSであるので，

$\dfrac{BO}{BS}=\dfrac{IO}{RS}$ よって，$\dfrac{BO}{f}=\dfrac{IO}{f_2}$ つまり $BO=\dfrac{f}{f_2}IO$ …②

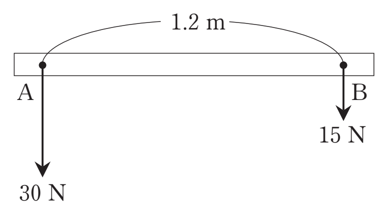
①，②より $AO:BO=\dfrac{f}{f_1}IO:\dfrac{f}{f_2}IO=\dfrac{1}{f_1}:\dfrac{1}{f_2}=f_2:f_1$

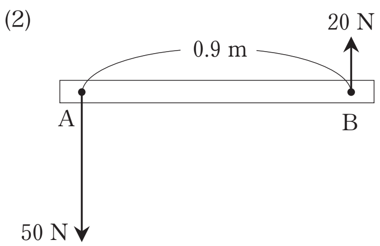
よって，合力の作用点Oは各力の作用点を力の大きさの逆比に内分することがわかる。

図５


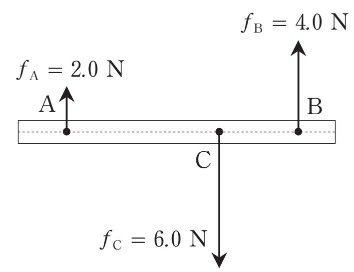
04

64 次の(1),(2)の剛体のA, Bにはたらく平行な２力の合力を図示し，合力の大きさも書き込みなさい。ただし，合力の作用点は直線AB上にとること。

(1)


(2)


65 図のように，滑らかな水平面上に置かれた軽くて一様な棒の点A，B，Cにそれぞれ2.0 N, 4.0 N, 6.0 Nの力を直線ABと垂直に加えたところ，棒は静止した。次の問いに答えなさい。ただし，(1),(3)の合力の作用点は直線AB上にあるものとする。



(1) AとBにはたらく力の合力f_{AB}を図に書き込みなさい。

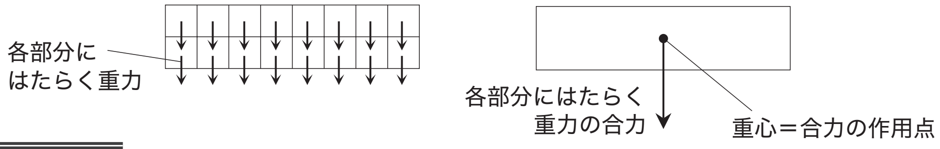
(2) AC：BCをできるだけ簡単な整数の比で表しなさい。（　：　）

(3) AとCにはたらく力の合力f_{AC}を図に書き込みなさい。

(4) (3)の合力f_{AC}の作用点はACをどのような整数の比に外分した点か。（　：　）

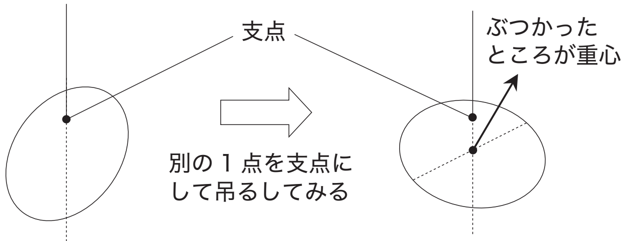
重心

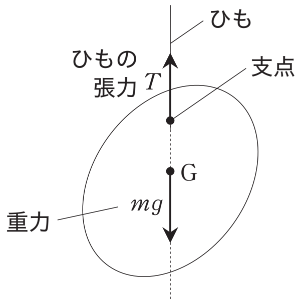
剛体の各部分にはたらく重力の合力の作用点を**重心**という。



重心の探し方

物体上の任意の点にひもをつけて吊るし，物体を静止させると，物体の重心 G はひもの延長線上に必ず存在する。従って異なる 2 点でひもを吊るすと，下図のように重心を知ることができる。

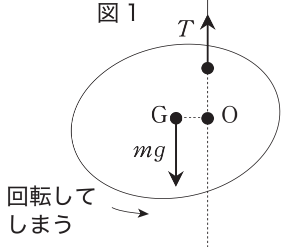




何故ひもの延長線上に重心があるのかを考えてみよう。図 1 のように，ひもの延長線上に重心がなく，物体が静止していたと仮定する。物体が静止していれば，どの点を回転軸にしても力のモーメントの和は 0 であるはずである。そこで図の点 O を回転軸として，力のモーメントを考えると，重力 mg には左回りの回転作用があり，ひもの張力 T には回転作用がない。よって力のモーメントの和 $\neq 0$ で物体は回転するはずであり，静止することと矛盾する。従って物体が静止するためには，ひもの延長線上に重心 G がなければならない。

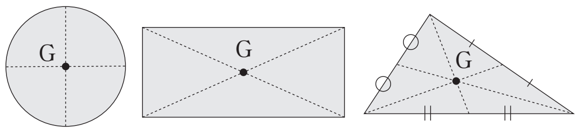
重心 G がひもの延長線上にあれば，点 O のまわりの力のモーメントの和は 0 となり，剛体は回転しないことになる。

図 1

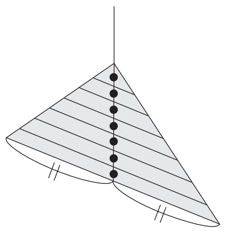


単純な形の物体の重心

密度が均一であれば，円板では円の中心が重心であり，正方形や長方形の板は対角線の交点が重心である。また，密度が均一な三角形の板の重心は各頂点から引いた中線の交点である。(3 本の中線は必ず 1 点で交わる)

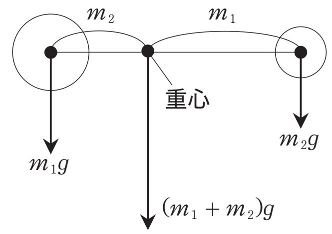


三角形の頂点の 1 つにひもをつけてつり下げて静止させると，やはりひもの延長線上に重心がくる。右図のように三角形が均一の棒の集まりであると考えると，それぞれの棒の重心はその中央にあり，ひもの延長線はその中点をすべて通ると考えられる。従って三角形の重心は，3 本の中線の交点である。



重心の位置ベクトル

右図のように質量 m_1, m_2 の物体が軽い棒でつながれている。2 つの物体にはたらく重力の大きさは m_1g, m_2g (g は重力加速度の大きさ）で，これらの重力は平行で同じ向きなので，これらの合力の作用点は 2 つの物体の重心間を $m_2 : m_1$ に内分する点である。ところで重心とは，剛体の各部分にはたらく重力の合力の作用点であったので，全体の重心は，まさにこの内分点になる。



暗記

2 物体を 1 つとみなした物体の重心は，2 物体の重心を質量の逆比に内分する点である

図 1

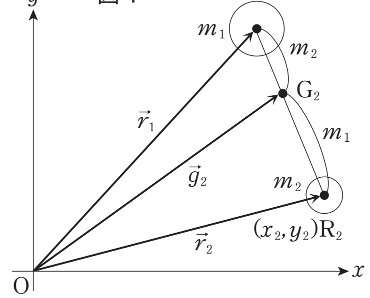
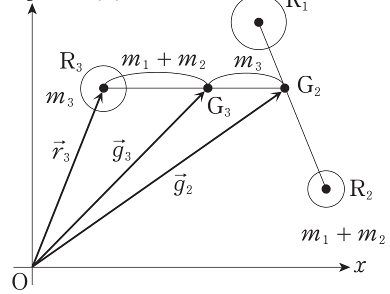


図 1 のように，質量 m_1, m_2 の物体の重心の座標がそれぞれ，$\mathrm{R_1}(x_1, y_1)$, $\mathrm{R_2}(x_2, y_2)$ で，この全体の重心を $\mathrm{G_2}$ とすると，この重心 $\mathrm{G_2}$ の位置ベクトル $\vec{g}_2$ は，$\mathrm{R_1}$ の位置ベクトル $\vec{r}_1$，$\mathrm{R_2}$ の位置ベクトル $\vec{r}_2$ を用いると，内分点の公式により，次のように表すことができる。

$$\vec{g}_2 = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \cdots ①$$

図 2



次に図 2 のように $\mathrm{R_3}(x_3, y_3)$ に重心がある質量 m_3 の物体が組み合わさったとき，全体の重心 $\mathrm{G_3}$ の位置ベクトル $\vec{g}_3$ はどうなるかを考えてみよう。質量 m_1, m_2 の物体を 1 つの物体とみなすと，質量 m_3 の物体にはたらく重力と，質量 m_1+m_2 の物体にはたらく重力の合力の作用点は，図のようにそれぞれの重心を $(m_1+m_2) : m_3$ に内分する点であるので，$\mathrm{R_3}$ の位置ベクトル $\vec{r}_3$ を用いると，①を用いると全体の重心の位置ベクトルは，

$$\vec{g}_3 = \frac{(m_1+m_2)\vec{g}_2 + m_3\vec{r}_3}{(m_1+m_2)+m_3} = \frac{(m_1+m_2)\dfrac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2} + m_3\vec{r}_3}{(m_1+m_2)+m_3} = \frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2+m_3\vec{r}_3}{m_1+m_2+m_3}$$

これを繰り返していくと，質量 m_1, m_2, m_3 ⋯，m_n の物体の重心がそれぞれ，$\mathrm{R_1}(x_1, y_1)$, $\mathrm{R_2}(x_2, y_2)$, $\mathrm{R_3}(x_3, y_3)$⋯$\mathrm{R}_n(x_n, y_n)$ にあるとき，全体の重心の位置ベクトル $\vec{g}_n$ は次のように表すことができる。

暗記

重心の位置ベクトル：$\vec{g}_n = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \cdots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n}$

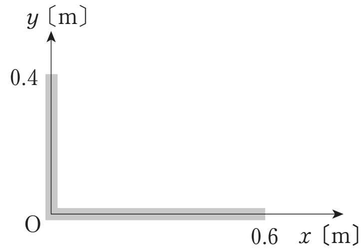
なお，このベクトルの成分を求めると，次のようになる。

$$\vec{g}_n = \frac{m_1(x_1, y_1) + m_2(x_2, y_2) + m_3(x_3, y_3) + \cdots + m_n(x_n, y_n)}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n}$$

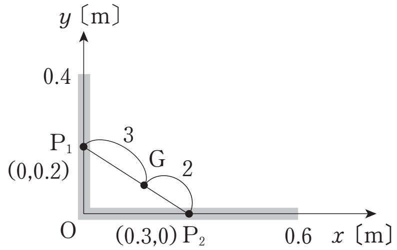
$$= \left(\frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n}, \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + \cdots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n}\right)$$

例題 6

長さ 1.0 m の太さが一様な針金を，図のように直角に折り曲げ，x 軸，y 軸と重ねて置いた。この針金の重心 G の座標を求めなさい。



y 軸上の針金と x 軸上の針金の質量比は $0.4:0.6=2:3$ であるので，それぞれの質量を 2 m, 3 m とする。また，y 軸上の針金の重心は，図に示すように $P_1(0,\ 0.2)$，x 軸上の針金の重心は $P_2(0.3, 0)$ である。原点 O に関する P_1，P_2 の位置ベクトルを $\vec{p}_1$，$\vec{p}_2$，重心 G の位置ベクトルを $\vec{g}$ とすると，



$$\vec{g}=\frac{2m\vec{p}_1+3m\vec{p}_2}{2m+3m}=\frac{2m(0,0.2)+3m(0.3,0)}{5m}$$

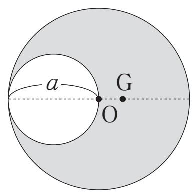
$$=\frac{(0.9,0.4)}{5}=(0.18,0.08)$$

よって，G の座標は **(0.18, 0.08)** …(答)

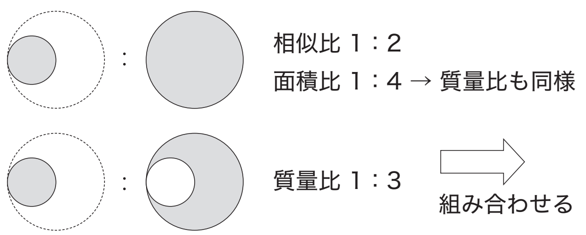
⚠ G は線分 P_1P_2 を質量の逆比，つまり 3：2 に内分する点になる。

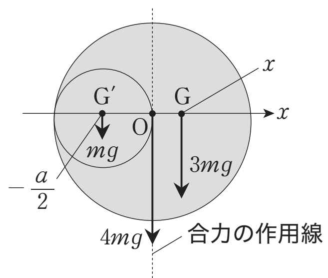
例題 7

中心が O で半径 a〔m〕の一様な円板がある。図のように半径 $\frac{a}{2}$〔m〕の円板を切り離したときの，重心 G から中心 O までの距離を求めなさい。



切り抜く円板と切り抜かれた円板の質量比は次のように求めることができる。





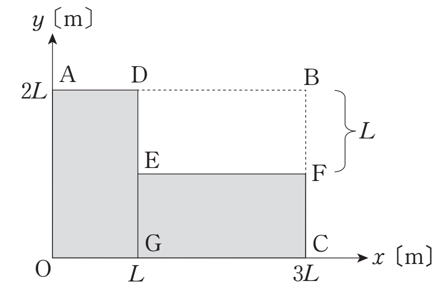
右上図のように，切り抜く前の状態に戻し，2 枚の板の質量を m, $3m$ とすると，これらの合力の作用線は O を通るはずである。図のように O を原点とする x 軸をとり，O に関する，切り離された板の重心 G の位置ベクトルを $\vec{p}=(x)$，O に関する，切り抜いた円板の重心 G' の位置ベクトルを $\vec{p}'=\left(-\frac{a}{2}\right)$ とすると，公式より，

$\vec{0}=\dfrac{m\vec{p}'+3m\vec{p}}{m+3m}=\dfrac{\vec{p}'+3\vec{p}}{4}$ であるので，これを $\vec{p}$ について解くと，

$\vec{p}=-\dfrac{\vec{p}'}{3}=-\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{a}{2}\right)=\left(\dfrac{a}{6}\right)$　よって，$x=\dfrac{a}{6}$　となるので，OG $=\dfrac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{6}}$〔m〕…(答)

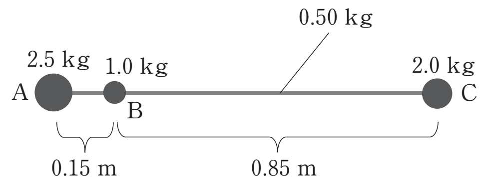
⚠ O は線分 G′G の質の逆比，つまり 3：1 の内分点であることを利用してもよい。

66 一様な厚さで，辺の長さが $2L$〔m〕，$3L$〔m〕の長方形の板 OABC がある。この板から図のように長方形 DBFE を切り取り，切り取った板を OADG に重ねた。座標軸を図のようにとったとき，この板の重心 Z の座標を求めなさい。



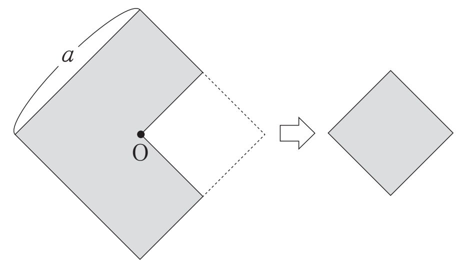
Z（　　　　，　　　　）

67 図のように 0.50 kg の一様な棒に 2.5 kg，1.0 kg，2.0 kg の 3 つの球 A,B,C が連結されている。この剛体の重心は A から何 m のところにあるか。



（　　　　　　　）m

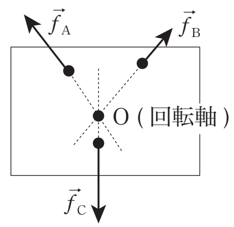
68 一辺が a〔m〕の厚さが一様な正方形の板がある。図のように $\frac{1}{4}$ の部分を切り離し，残った板の重心を G とするとき，G から点 O までの距離を求めなさい。



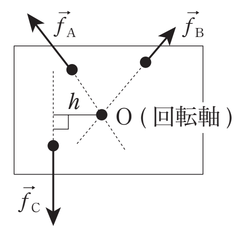
（　　　　　　　）〔m〕

互いに平行でない 3 力の作用線

回転していない剛体に互いに平行でない 3 力がはたらいているとき，その 3 力の作用線は 1 点で交わる性質がある。図のように任意の 2 力の作用線の交点を回転軸にすると，残りの力の作用線が O を通る場合，力のモーメントはすべて 0 になるが，通らない場合は腕の長さ h が生じるため，回転してしまう。



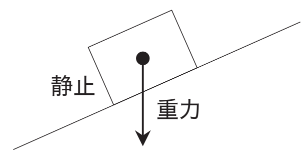
回転しない



左まわりに回転する

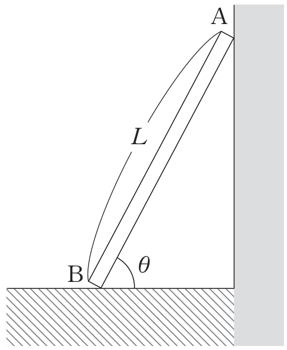
4 力以上がはたらいて剛体が回転しない場合は作用線が一致するとは限らないが，いくつかを合成（p51「剛体にはたらく 2 つの力の合成」参照）してはたらく力を 3 力とみなすと，その 3 力の作用線は一点で交わる。

69 右図の粗い斜面上で静止している物体にはたらく斜面からの垂直抗力の作用点 S を図示しなさい。



例題 8

図のように，質量 m，長さ L の太さが一様な棒を滑らかな壁と摩擦のある床に立てかける。棒と床の成す角を θ とするとき，次の問いに答えなさい。ただし，重力加速度の大きさを g とする。



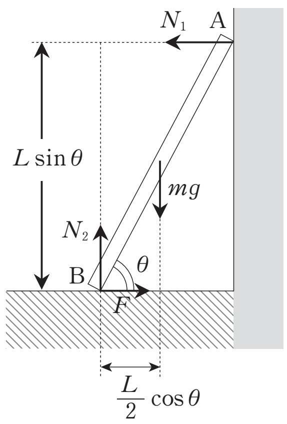
(1) 棒が静止しているとき，棒が壁から受ける垂直抗力の大きさ N_1 と棒が床から受ける垂直抗力の大きさ N_2 及び棒と床との間の摩擦力の大きさ F をそれぞれ求めなさい。

まずは棒にはたらく力をもれなく書き込む。
壁は滑らかなので壁からの摩擦力は無視できることに注意する。
水平方向，鉛直方向のつり合いの式を立てると，次のようになる。
水平方向：$F = N_1$ …①　　鉛直方向：$N_2 = mg$ …②
次に力のモーメントのつり合いの式を立てる。棒は静止しているので，どこを回転軸にしてもよい。力が2つはたらいているＢを回転軸にすれば，式中の文字が少なくなって楽である。
Ｂのまわりの力のモーメントのつり合い：

$(L\sin\theta)N_1 - \left(\dfrac{L}{2}\cos\theta\right)mg = 0$　式を整理すると，

$N_1 = \dfrac{mg\cos\theta}{2\sin\theta} = \dfrac{mg}{2\tan\theta}$ …③

①，②，③より，$N_2 = mg$ …(答)　$F = N_1 = \boldsymbol{\dfrac{mg}{2\tan\theta}}$ …(答)



(2) 棒が倒れないための $\tan\theta$ の範囲を求めなさい。ただし，棒と床との間の静止摩擦係数を μ とする。

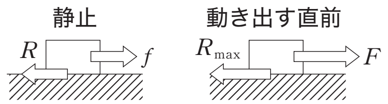
摩擦力 F が最大となるのは，μN_2 であるので，$F \leqq \mu N_2$

この式に $F = \dfrac{mg}{2\tan\theta}$，$N_2 = mg$ を代入すると，

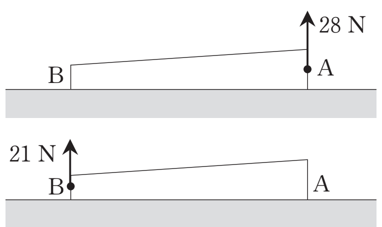
$\dfrac{mg}{2\tan\theta} \leqq \mu mg$　よって，$\boldsymbol{\tan\theta \geqq \dfrac{1}{2\mu}}$ …(答)

復習　静止摩擦力は一定ではない。また，最大になるときは，次の式で表すことができる。

最大静止摩擦力 ($R_{\max}$)
= 垂直抗力 (N)× 静止摩擦係数 (μ)

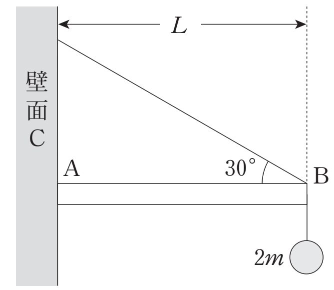


70 床の上に太さが均一でない長さ 1.4 m の木材がある。図のように一端Ａを鉛直に持ち上げるのに 28 N の力を要した。また，他端Ｂを鉛直に持ち上げるのに 21 N の力を要した。木材の質量と，Ｂから重心までの距離を求めなさい。ただし，重力加速度の大きさを 9.8 m/s² として，有効数字は 2 桁で答えること。



質量：(　　　　　) kg　Ｂから重心までの距離：(　　　　　) m

71 図のように質量 m〔kg〕，長さ L〔m〕の太さが一様な棒の一端Ａを鉛直な粗い壁にあて，他端Ｂと壁面Ｃを糸で結ぶ。この棒に質量 $2m$〔kg〕のおもりをＢに下げると，棒は水平で糸は棒と 30° の角を成してつり合った。重力加速度の大きさを g〔m/s²〕として，次の問いに答えなさい。



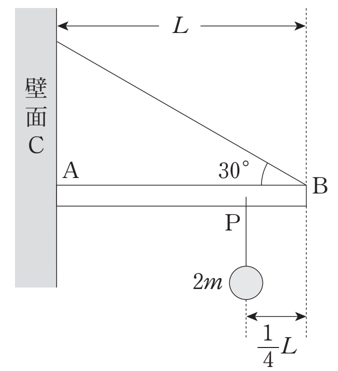
(1) 棒が壁から受けている摩擦力は上向きか，下向きか。

(　　　　)

(2) このときの糸の張力 T〔N〕，Ａ端にはたらく摩擦力 F〔N〕，壁からの垂直抗力 N〔N〕の大きさをそれぞれ求めなさい。

T = (　　　　　)〔N〕 F = (　　　　　)〔N〕 N = (　　　　　)〔N〕

次につり下げてあるおもりの位置をＡの方にゆっくりずらしていくと，Ｂから $\dfrac{1}{4}L$ の点Ｐまでは棒は静止したが，この位置から少しでもずらすとＡ端が滑り落ちてしまった。



(3) おもりをＰの位置に吊るしたときの糸の張力 T'〔N〕，Ａ端にはたらく摩擦力 F'〔N〕，壁からの垂直抗力 N'〔N〕の大きさをそれぞれ求めなさい。

T' = (　　　　　)〔N〕　F' = (　　　　　)〔N〕

N' = (　　　　　)〔N〕

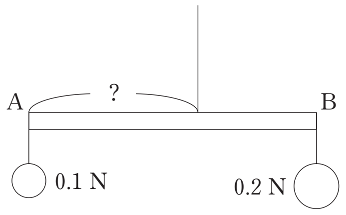
(4) 棒と壁との間の静止摩擦係数 μ を有効数字 2 桁で求めなさい。ただし，$\sqrt{3} = 1.73$ とする。

(　　　　　　　)

章　末　問　題

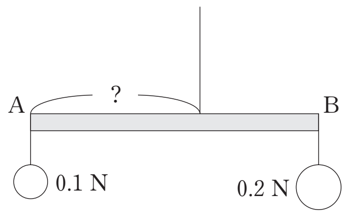
72 次の問いに答えなさい。

(1) 質量が無視できる長さ 0.3 m の太さが一様な棒 AB がある。図のように，棒の A 端，B 端にそれぞれ，重さ 0.1 N，0.2 N のおもりを取りつけ，棒を軽い糸で吊るすとき，棒が水平に保たれたまま静止するには，糸を A から何 m の位置に吊るせばよいか。



A から (　　　　　　　) m の位置

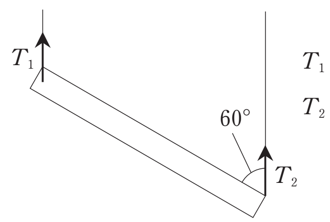
(2) 重さ 1.0 N，長さ 0.3 m の太さが一様な棒 AB がある。図のように，棒の A 端，B 端にそれぞれ，重さ 0.1 N，0.2 N のおもりを取りつけ，棒を軽い糸で吊るすとき，棒が水平に保たれたまま静止するには，糸を A から何 m の位置に吊るせばよいか。有効数字 2 桁で答えなさい。



A から (　　　　) m の位置

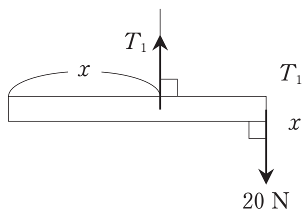
73 重さ 60 N，長さ 0.8 m の太さが一様な棒を，次のように糸で吊るして静止させた。図に示してある糸の張力の大きさ T_1，T_2 と長さ x を求めなさい。

(1)



T_1：(　　　　) N
T_2：(　　　　) N

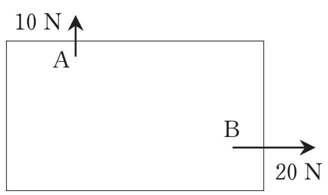
(2)



T_1：(　　　　) N
x：(　　　　) N

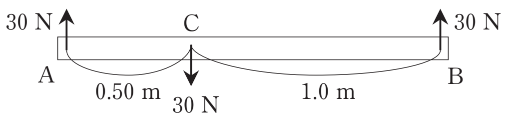
74 次の剛体の各点にはたらく力の合力の作用線を図に書き込みなさい。また，合力の大きさを求めなさい。
※根号はそのまま用いてよい。

(1) 合力の大きさ：(　　　　　) N



※ A,B にはたらく力の向きは互いに垂直

(2) 合力の大きさ：(　　　　　) N



※ 3 つの力の向きはすべて直線 AB と垂直

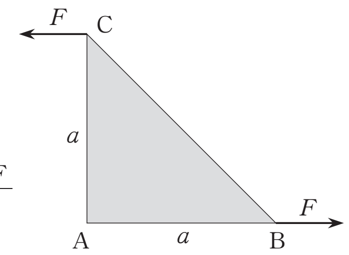
75 次の文中に当てはまるものを記号で選択しなさい。

(1) 長さの単位 m (メートル)，質量の単位を kg(キログラム)，時間の単位を s(秒) に選ぶと，力のモーメントの単位は (　　) である。

ア．kg・m/s　イ．kg・m^2/s　ウ．kg・m/s^2　エ．kg・m^2/s^2　オ．kg^2・m/s　カ．kg^2・m^2/s

(2) AB＝AC＝a の直角二等辺三角形 ABC の剛体がある。点 B と C に，図のように辺 AB に平行な大きさ F の力が互いに逆向きに働いている。このとき，偶力のモーメントの大きさは (　　) である。

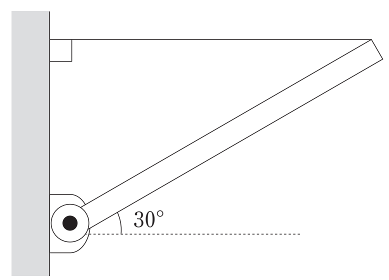
ア．aF　イ．$\sqrt{2}aF$　ウ．$2aF$　エ．$\dfrac{F}{a}$　オ．$\dfrac{\sqrt{2}F}{a}$　カ．$\dfrac{2F}{a}$



(3) 質量 300 g，長さ 1.0 m の一様な棒の両端を A，B とし，一端 A に 200 g のおもりをつける。おもりのついた棒の重心は，他端 B から (　　) cm のところにある。

ア．95　イ．90　ウ．85　エ．80　オ．75　カ．70

76 図のように長さ L〔m〕，重さ W〔N〕の一様な太さの棒の一端を，壁にちょうつがいで固定した。他端に糸をつけ棒が水平と 30° の角度となるように糸を水平にして壁に固定した。棒にはたらく糸の張力 T，ちょうつがいが棒に及ぼす力の水平成分 N，鉛直成分 F の大きさを，W を用いて表しなさい。



T = (　　　　　)〔N〕　N = (　　　　　)〔N〕
F = (　　　　　)〔N〕

04

77 次の文中の空欄に当てはまる適切な数式を答えなさい。

図 1

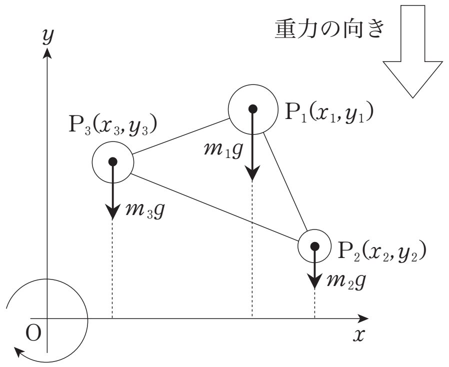


図 2

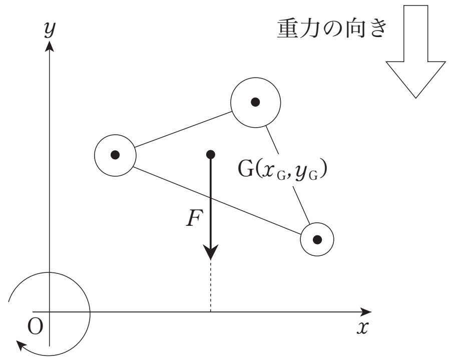


図 1 のように $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，$P_3(x_3, y_3)$ に質点があり，各質点の質量をそれぞれ m_1, m_2, m_3，重力加速度の大きさを g とする。このとき，原点 O のまわり（右回りを正）の重力のモーメントの和を，m_1, m_2, m_3, x_1, x_2, x_3, g を用いて表すと，

M = ア .(　　　　　　　　　　　　　　　　　　) …①　となる。

次に，図 2 のように全体を 1 つの物体とみなし，この物体の重心の位置を $G(x_G, y_G)$ とすると，この物体にはたらく重力は F = イ .(　　　　　　　　　　　　　　　　　　) であるので，原点 O のまわり (右回りを正とする) の重力のモーメントを，x_G, m_1, m_2, m_3, gを用いて表すと，

M = ウ .(　　　　　　　　　　　　　　　　　　) …②　となる。

① , ②は等しいと考えられるので，x_G をm_1, m_2, m_3, x_1, x_2, x_3 を用いて表すと，

x_G = エ .(　　　　　　　　　　　　　　　　　　)

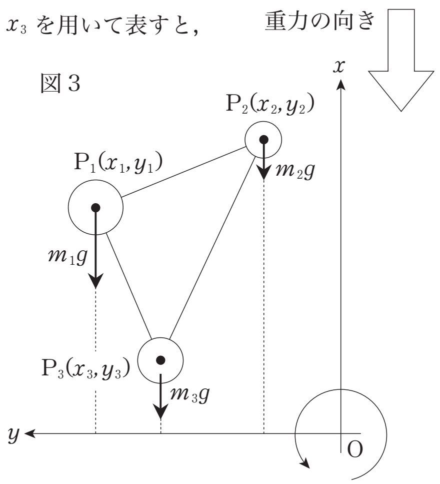
さらに図 1 を xy 軸も含めて 90° 回転させると，図 3 のようになる。このとき x 軸の負の向きに重力がかかるので，原点のまわり（左回りを正とする）の重力のモーメントを同様に考えると，全体の重心の y 座標は，

y_G = オ .(　　　　　　　　　　　　　　　　　　)

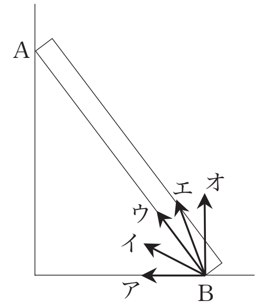
と求められる。よって$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，$P_3(x_3, y_3)$ それぞれの位置ベクトル $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, $\vec{p}_3$ を用いて，重心の位置ベクトル $\vec{r}$ を表すと，

$\vec{r}$ = カ .(　　　　　　　　　　　　　　　　　　) となる。

図 3



78 図のように質量 m〔kg〕，長さ L〔m〕のはしご AB を鉛直で滑らかな壁面と粗い水平な床の間に水平から θ の角度で立てかける。重力加速度の大きさを g〔m/s²〕として，次の問いに答えなさい。



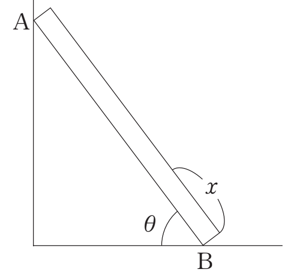
(1) B 端にはたらく抗力の向きをア〜オの中から選びなさい。(　　　　)

(2) このはしごを $\tan\theta = \frac{4}{3}$ で質量 $5m$〔kg〕の人がB 端から距離 x〔m〕だけ登ったとき，B 端にはたらく摩擦力 F の大きさを求めなさい。

F = (　　　　　　　　　　)〔N〕

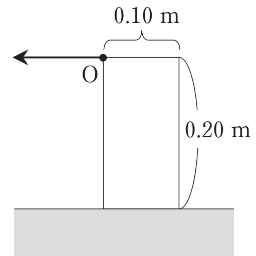
(3) (2) のとき，人はどこまで登るとはしごは滑り出すか。滑り出すときの x を求めなさい。ただし，床とはしごの間の静止摩擦係数を 0.5 とする。

x = (　　　　　　　　　　)〔m〕



04

79 図のように，粗い水平面にある重さ 20 N の一様な直方体を点 O に取り付けたひもで水平方向に引く。引く力の大きさを徐々に大きくしていくと，大きさが F_0〔N〕に達した直後に直方体は水平方向を滑ることなく傾き始めた。次の問いに答えなさい。



(1) F_0 の値を求めなさい。 (　　　　　　　　)〔N〕

(2) 直方体が水平面上を滑り始める前に傾き始めるには，直方体と水平面との間の静止摩擦係数がある値以上である必要がある。その静止摩擦係数の値を求めなさい。

(　　　　　　　　　　)〔N〕

80 図のような厚さの一様な五角形 OABCD の板がある。この板の重心は O から何 cm 離れたところにあるか。小数第 1 位まで求めなさい。

(　　　　　　　　　　)〔cm〕