✤は数学的準備

●目　　次●

●本書は「高校物理基礎」の内容を含みません

「導出物理（上巻／下巻）」は第７版より高校物理基礎の内容が「導出物理基礎 第３版」に移行されましたのでご注意ください。

導出物理基礎 第３版　…高校物理基礎 準拠

導出物理（上）力学・波動編　第７版　…高校物理 準拠

導出物理（下）電磁気・熱・原子編　第７版　…高校物理 準拠

B5 判　1273 円+税

●本書の使い方

「わからない」と嘆く生徒を見ていると，「解説を隅々まで読んでいない，もしくは読もうとしない，もしくは内容を理解できるまで考えていない」と感じるケースが多いです。従って当テキストを隅々まで読み，納得いくまで考えてください。急がずじっくり読んだ方がいいです。そして仮に納得できなくても，思い切って基本問題を解いてみると，そこで初めて納得できることもあります。

ただし，高校物理基礎の内容が不得意であると，そもそも本書の習得は大変厳しいです。したがって物理が苦手で本書にたどり着いた方は特に「**導出物理基礎 第３版**」を先に学習することを強くお勧めします。

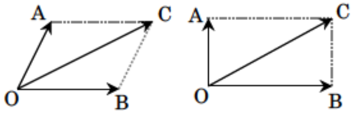
当テキストにおいて注意すべきことは，網羅性があり，かなり踏み込んだ内容も含まれるため，すべてをこなそうとすると挫折する可能性が高いです。そのため**個人のレベル，理解度，受験する大学の過去問の傾向などに合わせて学習すべき情報を絞ったほうがいい**です。この点に関しては，易しめの大学を受験するほど絞るべき情報が多くなるため，どこに絞るべきかはできるだけ教師や講師の指示を仰いだ方が得策です。学習は物理に限らず，**薄くまんべんなくやるほどすべてが中途半端となり，成績が下がることさえあります。**この点には十分注意して当テキストを活用ください。

★印のついた項目については発展内容，もしくは高校数学の内容をすべて終えていないと理解できない内容になっているので，読み飛ばしていただいても支障はありません。この内容はより理解を深めたい人のための項目になります。

1章　物理で使う数学Ⅰ

●ベクトルの暗記すべきパターン

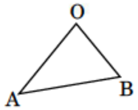
OACB が平行四辺形(長方形)であるとき，$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ の関係が成り立つ。



証明　$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}$ で，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$ であるので，$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

OACB が平行四辺形なら，$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

△OAB では，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ が成り立つ。



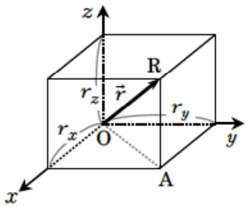
$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

同じ点なら何でもよい！　**(後)−(前) と覚えよう！**

証明　$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$　※O はどの位置にあってもよい！

●座標空間と空間ベクトル



左図のように互いに直行する x 軸，y 軸，z 軸が設定された空間を**座標空間**といい，座標は (x座標，y座標，z座標) のように表される。また，**空間ベクトル**は次のように定量化されている。

$$\vec{r}=(x\text{成分},\ y\text{成分},\ z\text{成分})$$

例えば原点を O，点 R を (r_x,r_y,r_z)，$\overrightarrow{OR}=\vec{r}$ としたとき，その成分と大きさは次のように表すことができる。

$$\vec{r}=(r_x,r_y,r_z)\ ,\ |\vec{r}|=\sqrt{r_x^2+r_y^2+r_z^2}$$

$OA=\sqrt{r_x^2+r_y^2}$ であるので，

$OR=\sqrt{OA^2+AR^2}$

$=\sqrt{r_x^2+r_y^2+r_z^2}$

成分計算も平面ベクトルと同様に行うことができる。

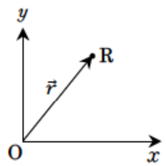
例　$\vec{a}=(1,-2,3)$，$\vec{b}=(5,7,-6)$ のとき，

$2\vec{a}+\vec{b}=2(1,-2,3)+(5,7,-6)$

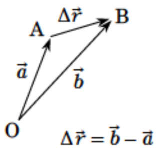
$=(2,-4,6)+(5,7,-6)=(7,3,0)$

●位置ベクトルと変位ベクトル

ある基準点 O から任意の点 R を定めるとき，O を始点として R を終点とするベクトルを点 O に関する R の**位置ベクトル**という。座標平面，座標空間においては，一般に原点を基準にすることがほとんどである。また，R の位置ベクトルは慣用的に $\vec{r}$ と表される。



また，ある点が A から B まで移動したとき，$\overrightarrow{AB}$ を変位ベクトルという。$\overrightarrow{AB}=\Delta\vec{r}$ とし，O に関する A，B の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$,$\vec{b}$ としたとき，$\Delta\vec{r}=\vec{b}-\vec{a}$ と表すことができる。つまり次のことがいえる。



$\Delta\vec{r}=\vec{b}-\vec{a}$

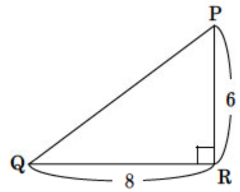
$\overrightarrow{(変位ベクトル)}=\overrightarrow{(後の位置ベクトル)}-\overrightarrow{(前の位置ベクトル)}$

1 図のように直角三角形 PQR がある。次の問いに答えなさい。

(1) 次の空欄に当てはまるベクトルを，符号や数値を用いず P,Q,R だけを用いて表しなさい。

$\overrightarrow{PQ}=\boxed{ア}-\boxed{イ}$　$\overrightarrow{QR}=\boxed{ウ}-\boxed{エ}$

$\overrightarrow{QP}-\overrightarrow{QR}=\boxed{オ}$　$\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{QP}=\boxed{カ}$



ア.（　　　）イ.（　　　）ウ.（　　　）

エ.（　　　）オ.（　　　）カ.（　　　）

(2) 次のベクトルの大きさを求めなさい。

① $|\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PR}|=$（　　　）　② $|\overrightarrow{RP}+\overrightarrow{RQ}|=$（　　　）　③ $|\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RP}|=$（　　　）

2 原点が O である xyz 座標空間の点 P(0,0,−3)，Q(0,6,0)，R(−1,0,2) について，次の文中の（　）内を記号で選択しなさい。

・$\overrightarrow{OP}$ は ①(ア. xy　イ. yz　ウ. xz) 平面と垂直である。（　　　）

・$\overrightarrow{OQ}$ は ②(ア. xy　イ. yz　ウ. xz) 平面と垂直である。（　　　）

・$\overrightarrow{OR}$ は ③(ア. xy　イ. yz　ウ. xz) 平面上にある。（　　　）

・$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$ のうち，$\overrightarrow{OR}$ と垂直なのは，

④(ア. $\overrightarrow{OP}$ のみ，イ. $\overrightarrow{OQ}$ のみ，ウ. 両方) である。（　　　）

3 xyz 座標空間の点 A(−9,−4,8)，B(−4,1,3) について次の空欄を埋めなさい。ただし，根号は用いたままでよいものとする。

・$\overrightarrow{AB}=(\boxed{ア},\boxed{イ},\boxed{ウ})$ であるので，$|\overrightarrow{AB}|=\boxed{エ}$ である。

・ある点が A から B まで移動したとき，$\overrightarrow{AB}$ は $\boxed{オ}$ ベクトルとみなすことができる。

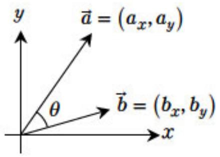
・座標空間の原点 O についての A,B の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$,$\vec{b}$ とするとき，

$|\vec{a}-2\vec{b}|=\boxed{カ}$ である。

ア.（　　　）イ.（　　　）ウ.（　　　）エ.（　　　）オ.（　　　）

カ.（　　　）

●内積の定義



成す角が θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ であるベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ において，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**内積**といい，**スカラー量**として次の式で定義されている。

$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$　**※「・」は「ドット」と読む**

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の成す角が 90°であるとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 90^\circ=0$ となる。
よって，2つのベクトルの内積が0ならば，2つのベクトルは互いに垂直である。

$\vec{a}=(a_x,a_y)$，$\vec{b}=(b_x,b_y)$ のとき，次の性質がある。

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y}$$

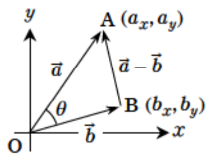
※ $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$ のときは，

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}$$

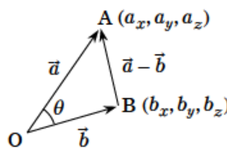
●内積のその他の性質
$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$
$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$
交換法則：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
分配法則：$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

!注意　力がする仕事 $Fr\cos\theta$ は内積を用いて $\vec{F}\cdot\vec{r}$ と表すことができる。

4 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ は $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ と定義されているものとして，次の空欄を選択または埋めなさい。



原点を O とする xy 平面上に A (a_x,a_y), B (b_x,b_y) をとり，
$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\angle AOB=\theta$ とするとき，
$|\vec{a}|^2=a_x^2+a_y^2\cdots$①，　$|\vec{b}|^2=b_x^2+b_y^2\cdots$②
$\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}=(a_x,a_y)-(b_x,b_y)=(a_x-b_x,a_y-b_y)$ であるので，
$|\overrightarrow{BA}|^2=|\vec{a}-\vec{b}|^2=(a_x-b_x)^2+(a_y-b_y)^2\cdots$③
また，余弦定理より，$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ であり，
内積の定義 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ により，$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$
であるので，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2}{2}\cdots$④



①,②,③,④より $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を a_x,a_y,b_x,b_y を用いて表すと，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{\text{ア}}$

同様に O, A, B を xyz 座標空間の点として，O$(0,0,0)$, A(a_x,a_y,a_z), B(b_x,b_y,b_z), $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\angle AOB=\theta$ とすると，

$|\vec{a}|^2=\boxed{\text{イ}}$，$|\vec{b}|^2=\boxed{\text{ウ}}$，$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\boxed{\text{エ}})^2+(\boxed{\text{オ}})^2+(\boxed{\text{カ}})^2$

であるので，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2}{2}=\boxed{\text{キ}}$

なお，$\vec{a}\perp\vec{b}$ であるとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{\text{ク}}$ で，④より，$|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=\boxed{\text{ケ}}$ となり，これは $\boxed{\text{コ}}$ の定理を表している。

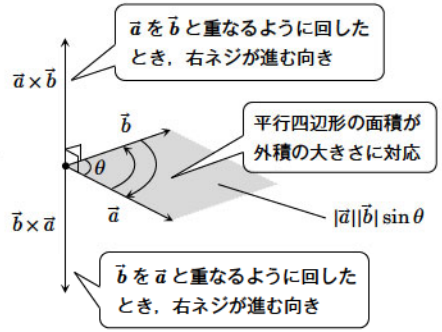
ア.(　　　)　イ.(　　　)　ウ.(　　　)　エ.(　　　)
オ.(　　　)　カ.(　　　)　キ.(　　　)　ク.(　　　)
ケ.(　　　)　コ.(　　　)

●外積の定義

成す角が θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ である空間ベクトル $\vec{a},\vec{b}$ において，$\vec{a}\times\vec{b}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**外積**といい，**ベクトル量**として次のように定義されている。

$\vec{a}\times\vec{b}$
- **大きさ：$|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$**
- **向き：始点をそろえ，始点を軸に $\vec{a}$ を $\vec{b}$ と重なるように回転したとき，右ネジが進む向き**

※「×」は「クロス」と読む
※ $\vec{a}\times\vec{b}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を含む平面に垂直である
※遠回りをして $\vec{a}$ を $\vec{b}$ の方へ回してはいけない



重要　上図より，$\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$
つまり交換法則が成り立たない

!注意　後で学習する力のモーメントは $\vec{r}\times\vec{F}$ と外積で定義されている。その他，ローレンツ力は $q\vec{v}\times\vec{B}$，電磁力は $L\vec{I}\times\vec{B}$ と表すことができ，外積は公式を覚えるために重要である。

5 外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ の大きさは $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ と定義されているものとして，次の空欄を選択または埋めなさい。

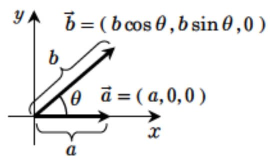
$\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の成す角を θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ をとする。
三角比の性質 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ 及び，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき $\sin\theta \geqq 0$
であることに注意すると，$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$　従って，

$$\begin{aligned}|\vec{a}\times\vec{b}|&=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta}\\&=\sqrt{\left(|\vec{a}||\vec{b}|\right)^2-\left(|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\right)^2}=\sqrt{\left(|\vec{a}||\vec{b}|\right)^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}\\&=\sqrt{(a_x^2+a_y^2+a_z^2)(b_x^2+b_y^2+b_z^2)-(a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z)^2}\\&=\sqrt{(a_yb_z-a_zb_y)^2+(a_zb_x-a_xb_z)^2+(a_xb_y-a_yb_x)^2}\ \cdots(\text{I})\end{aligned}$$

ここで，$\vec{a}\times\vec{b}=(a_yb_z-a_zb_y,\ a_zb_x-a_xb_z,\ a_xb_y-a_yb_x)\cdots(\text{II})$ と定義すると，これは(Ⅰ)を満たし，外積の大きさの定義に矛盾しない。また，$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}=($ ① $)$　$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{b}=($ ② $)$ であるので，$\vec{a},\vec{b}$ の始点が一致するとき，$\vec{a}\times\vec{b}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を含む平面と③(平行・垂直)である。

次に，右図のように $\vec{a}=(a,0,0)$，$\vec{b}=(b\cos\theta,b\sin\theta,0)$ $(a>0,b>0,\ 0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$とすると，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の成す角は θ で，ともに xy 平面上にある。
このとき（Ⅱ）の定義によって $\vec{a}\times\vec{b}$ を計算すると，

$$\vec{a}\times\vec{b}=(\boxed{④},\boxed{⑤},\boxed{⑥})$$



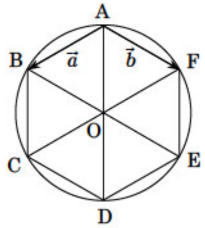
※z 軸は紙面裏から表向き

よって，$\vec{a}\times\vec{b}$ は原点を始点として z 軸の⑦(正・負)の向きで，これは $\vec{a}$ を $\vec{b}$ の方へ回して⑧(右・左) ねじが進む向きと一致する。このことから $\vec{b}\times\vec{a}$ は $\vec{b}$ を $\vec{a}$ の方へ回して(⑧) ねじが進む向きであるので，$\vec{a}\times\vec{b}$ と $\vec{b}\times\vec{a}$ は平行で，⑨（ア.ともに同じ向き，イ.互いに逆向き）である。

①(　　)②(　　)③(　　)④(　　)⑤(　　)⑥(　　)⑦(　　)⑧(　　)
⑨(　　)

例題 1　円 O に内接する正六角形 ABCDEF において

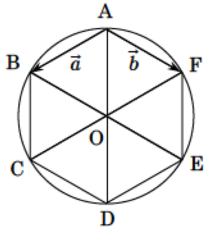
$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{BD}$ を $\vec{a},\vec{b}$ を用いて表しなさい。



$\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{ED}=\vec{a}$　$\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{CD}=\vec{b}$ であることに注意すると，$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{ED}=2\vec{b}+\vec{a}=\vec{a}+2\vec{b}$

! 別解　$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}=\vec{b}+\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}+2\vec{b}$

6　円 O に内接する正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a},\vec{b}$ を用いて表しなさい。



(1) $\overrightarrow{BC}=$ (　　　　　　　)　(2) $\overrightarrow{CE}=$ (　　　　　　　)

(3) $\overrightarrow{CF}=$ (　　　　　　　)　(4) $\overrightarrow{AE}=$ (　　　　　　　)

例題 2　次の 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の成す角 θ ($0°\leqq\theta\leqq 180°$) は何度か。

(1) $\vec{a}=(1,2)$, $\vec{b}=(-1,3)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times(-1)+2\times3=5$

$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

$|\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ より，

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{5}{\sqrt{5}\times\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって，$\theta=45°$ …(答)

(2) $\vec{a}=(3,-2)$, $\vec{b}=(2,3)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times2+(-2)\times3=0$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ より，

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{0}{|\vec{a}||\vec{b}|}=0$$

よって，$\theta=90°$ …(答)

7　次の 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の成す角 θ ($0°\leqq\theta\leqq180°$) は何度か。

(1) $\vec{a}=(2,-1)$, $\vec{b}=(2,4)$　(　　　)°　(2) $\vec{a}=(1,-3)$, $\vec{b}=(1,2)$　(　　　)°

(3) $\vec{a}=(2,4)$, $\vec{b}=(-1,-2)$　(　　　)°　(4) $\vec{a}=(1,0,1)$, $\vec{b}=(1,1,0)$　(　　　)°

★章末問題★

8　$\vec{v}_1,\vec{v}_2$ の成す角が 60° で $|\vec{v}_1|=|\vec{v}_2|=10$ であるとき，次の問いに答えなさい。ただし，根号は用いたままでよいものとする。

(1) $\vec{v}_3=\vec{v}_2-\vec{v}_1$ とするとき，$\vec{v}_3$ を図 1 に書き入れ，$\vec{v}_3$ の大きさを求めなさい。(　　　　)

(2) $\vec{v}_4=\vec{v}_1+\vec{v}_2$ とするとき，$\vec{v}_4$ を図 2 に書き入れ，$\vec{v}_4$ の大きさを求めなさい。(　　　　)

図 1

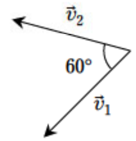
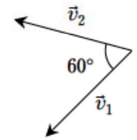
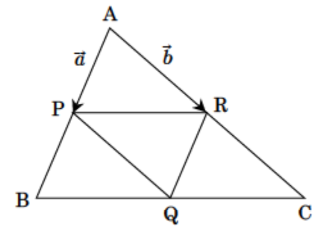


図 2



9　△ABC の辺 AB，辺 BC，辺 CA の中点をそれぞれ P，Q，R とする。次の問いに答えなさい。



(1) $\overrightarrow{AP}$と等しいベクトルをすべて答えなさい。

(　　　　　　　　　　　　　　　　　　)

(2) $\overrightarrow{AR}$と等しいベクトルをすべて答えなさい。

(　　　　　　　　　　　　　　　　　　)

(3) $\overrightarrow{AP}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AR}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a},\vec{b}$ を用いて表しなさい。

① $\overrightarrow{QA}=$ (　　　　　　　)　② $\overrightarrow{BC}=$ (　　　　　　　)

③ $\overrightarrow{BR}=$ (　　　　　　　)　④ $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{CR}=$ (　　　　　　　)

10　次の文中の(　)を選択または埋めなさい。ただし，根号は用いたままでよいものとする。

$\vec{a}=(0,0,1)$, $\vec{b}=(2,0,0)$ のとき，$|\vec{a}-\vec{b}|=$①(　　)，$\vec{a}\cdot\vec{b}=$②(　　)，$|\vec{a}\times\vec{b}|=$③(　　)で，$\vec{a}\times\vec{b}$ の向きは xyz 座標空間の原点を始点としたとき，④(x, y, z)軸の⑤(正・負)の向きと一致する。

①(　　)②(　　)③(　　)④(　　)⑤(　　)

11　ある小球が一定の力 $\vec{F}$を受けたところ，xyz 座標空間を A から B まで直進した。$\overrightarrow{AB}=\Delta\vec{r}$ とするとき，力 $\vec{F}$ がした仕事はどのように表すことができるか。次から記号で選択しなさい。ただし，$\vec{F}$と$\Delta\vec{r}$ は平行でないものとする。

ア. $|\vec{F}||\Delta\vec{r}|$　イ. $\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$　ウ. $|\vec{F}\times\Delta\vec{r}|$　エ. $\dfrac{\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}}{|\vec{F}||\Delta\vec{r}|}$　(　　)

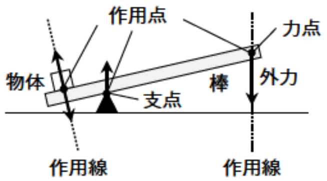
4章　剛体のつり合い

●質点と剛体　質量があり，大きさが無視できる物体を**質点（しつてん）**といい，大きさがあり，力を加えても変形しないような物体を**剛体**という。

●並進運動と回転運動　剛体の運動には剛体の各点が平行移動する**並進運動**と，ある 1 点を中心に剛体の各点が回転する**回転運動**がある。剛体の運動はどんなに複雑でもこの 2 つの運動の組み合わせになっている。

●力点と作用点　物体に力を加える点を**力点**といい，1 つの物体に注目したときに，その物体が外から力を受ける点を**作用点**という。また，作用点を通り，受ける力の向きに引いた線を**作用線**という。

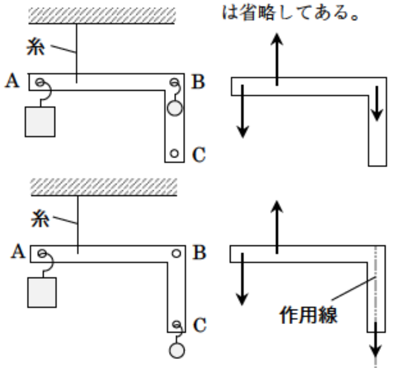
てこの場合



左図のてこの場合を考えてみよう。棒に対して力を加える点が力点になる。持ち上げられる物体に注目すると，物体は棒から抗力を受けるため，抗力を受ける点が作用点になる。また，棒に注目した場合は，棒にはたらく外力の始点や，物体から受ける抗力の始点，支点から受ける抗力の始点などがすべて作用点になる。このように，注目する物体によって様々な点が作用点になるので注意しよう。

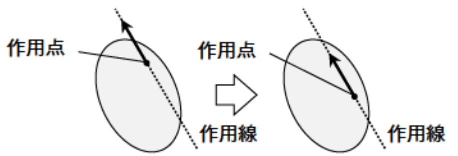
●作用線の定理

※剛体にはたらく重力は省略してある。



左図のように，直角に折れ曲がった軽い剛体の両端におもりが吊るされていて，AB が水平に保たれていたとする。この剛体を手でおさえ，B の位置に吊るされたおもりを C に移して手を離すと，剛体は回転することなく AB は水平に保たれる。このように，剛体にはたらく力は作用線上で移動させても，物体を回転させる効果が変わらない性質があり，力の大きさと向きが変わらなければ，作用点を作用線上のどこに動かして考えてもよい。これを**作用線の定理**という。

暗記



【作用線の定理】

剛体に加わる力をその作用線上で移動させても，物体を回転させる効果は変わらない

●力のモーメントとは

図 1

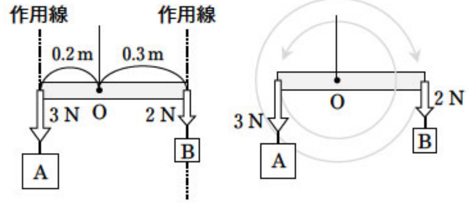


図 1 のように，軽く一様な棒の両端におもり A，B を取り付け，棒上の点 O に糸をかけて天井から棒を吊るすと，棒は水平に保たれたまま静止した。このときのおもり A，B が棒に及ぼす回転作用を考える。点 O を回転軸とするとき，A は左回り，B は右回りの回転作用を与えており，それらがつり合って棒は回転せずに静止している。このような回転作用は**力のモーメント**という物理量で定義されており，**回転軸と力の作用線との距離**を「**腕の長さ**」として，大きさが次のように表される。

力のモーメントの大きさ ＝（腕の長さ）×（力の大きさ）

特に回転軸を点 O と決めたときの回転作用を，**点 O のまわりの力のモーメント**という。

従って，

おもり A が及ぼす点 O のまわりの力のモーメントの大きさ＝0.2 m × 3 N ＝ 0.6 N·m

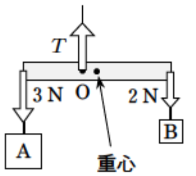
おもり B が及ぼす点 O のまわりの力のモーメントの大きさ＝0.3 m × 2 N ＝ 0.6 N·m

一般に右回りの力のモーメントの和と，左回りの力のモーメントの和が等しいとき，剛体は回転しないことが知られている。ここで，左回りの力のモーメントを正，右回りの力のモーメントを負と決めると，剛体にはたらく力のモーメントの総和は 0 になる。

つまり，（棒にはたらく力のモーメントの総和）＝ $0.2 \times 3 - 0.3 \times 2 = 0$ である。

なお，A，B が及ぼす作用は並進作用もあり，**力の並進作用は剛体の重心に加速度を与える**ことが知られている。従って，剛体の重心の加速度を用いて運動方程式を立てることもできる。（一様な棒の重心は，棒の中央にある。重心の詳細は後述する）

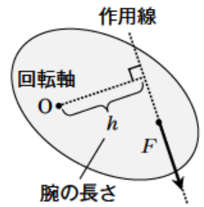
図 1 の場合，棒の質量を m，点 O にかけられた糸の張力を T とすると，棒の重心の加速度は 0 であるので，鉛直方向の運動方程式は次のようになる。



※剛体は静止しているので重心の加速度は $\vec{0}$

$$m \cdot 0 = T - 3\ \mathrm{N} - 2\ \mathrm{N}$$

暗記

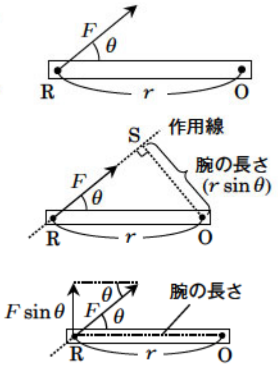


点 O のまわりの力のモーメントの大きさ：$M = hF$ (N·m)

h：腕の長さ(m)　F：はたらく力の大きさ(N)

左回りの力のモーメントを正としたとき，右回りの力のモーメントを負とする。1 つの剛体に複数の力がはたらくとき，点 O のまわりの力のモーメントを $M_1, M_2, M_3 \cdots$ とすると，点 O を軸に剛体が回転しないための条件は $M_1 + M_2 + M_3 + \cdots = 0$

例題 1 滑らかな水平面上に剛体が置かれていて，この剛体は点Oを軸に回転できるようになっている。図のように剛体上の点Rを力点としてF(N)の力を加えたとき，剛体にはたらく点Oのまわりの力のモーメントの大きさを求めなさい。



腕の長さは作用線と回転軸との距離であるので，図のOS $= r\sin\theta$ が腕の長さ。よって，求める力のモーメントの大きさ$=(r\sin\theta)\times F=$ $\boldsymbol{rF\sin\theta}$ …(答)

別解 ORと垂直な方向の分力 $F\sin\theta$ の腕の長さはORと考えることもできる。よって，力のモーメントの大きさ $= r\times F\sin\theta = \boldsymbol{rF\sin\theta}$

★外積による力のモーメントの定義

図1

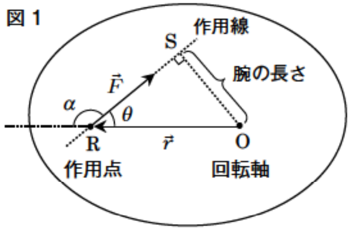


図1のように，剛体にはたらく力を $\vec{F}$，始点が回転軸O，終点が作用点Rであるベクトルを $\vec{r}$ とするとき，力のモーメントは外積で次のように定義されている。

$\vec{\boldsymbol{M}} = \vec{r}\times\vec{\boldsymbol{F}}$　（×は外積を表す）

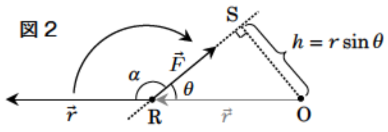
注意 外積については p7「外積の定義」参照
外積は交換法則が成り立たないため，
$\vec{M}=\vec{F}\times\vec{r}$ と覚えてはいけない。※ $\vec{F}\times\vec{r}=-\vec{r}\times\vec{F}$

この力の大きさを考えてみよう。
図2のように，$\vec{F}$ と $\vec{r}$ の始点をそろえたときの成す角を α，∠ORS $=\theta$ とする。
$\alpha = 180°-\theta$ より，$\sin\alpha=\sin\theta$ であることに注意すると，

$|\vec{r}\times\vec{F}| = rF\sin\alpha = rF\sin\theta$

これは例題1の結果に一致する。

図2

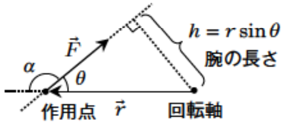


※$\vec{\boldsymbol{M}}=\vec{r}\times\vec{\boldsymbol{F}}$ は紙面表向きから裏向き

次に $\vec{M}$ の向きについて考えてみよう。外積の定義により，$\vec{r}$ と $\vec{F}$ の始点をそろえ，その始点を軸として $\vec{r}$ を $\vec{F}$ と重なるように回し，右ねじが進む向きが $\vec{M}$ の向きである。これは $\vec{r}$ と $\vec{F}$ を含む平面に対して垂直であり，図2では紙面表から裏向きになる。この向きによって，空間的な回転作用の方向が決まる。

複数の力が剛体に作用している場合は，力のモーメントのベクトル和を求めなければいけないが，平面ベクトルのみを扱う場合は，右回りや左回りを正としてその量を簡単に計算することができる。

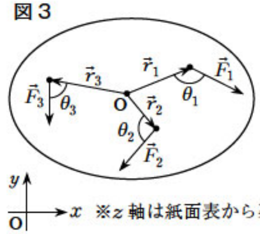
暗記



力のモーメント
$\vec{\boldsymbol{M}}=\vec{r}\times\vec{\boldsymbol{F}}$
$\boldsymbol{M = rF\sin\theta = rF\sin\alpha}$
※ $\vec{r}$ の始点は必ず回転軸にする

●平面ベクトルである力のモーメントの和

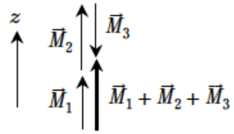
図3



※z 軸は紙面表から裏向き

図3のように剛体に力 $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ を加える場合を考える。これらの作用点はすべて xy 平面上にあり，各力は xy 平面と平行である。z 軸を紙面表から裏向きにとると，原点Oのまわりの各力のモーメントは，

$\vec{M_1}=\vec{r_1}\times\vec{F_1}$…$z$ 軸の正の向き（右回りの回転作用）
$\vec{M_2}=\vec{r_2}\times\vec{F_2}$…$z$ 軸の正の向き（右回りの回転作用）
$\vec{M_3}=\vec{r_3}\times\vec{F_3}$…$z$ 軸の負の向き（左回りの回転作用）



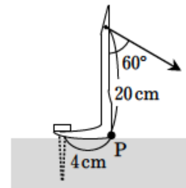
$\vec{M_1}, \vec{M_2}, \vec{M_3}$ はすべて z 軸に平行で，$\vec{M_1}, \vec{M_2}$ は z 軸の正の向き，$\vec{M_3}$ は z 軸の負の向きであり，各モーメントの x 成分，y 成分は0である。さらに，
$|\vec{M_1}| = r_1F_1\sin\theta_1$，$|\vec{M_2}| = r_2F_2\sin\theta_2$，$|\vec{M_3}| = r_3F_3\sin\theta_3$
であることに注意すると，

$$\vec{M_1}+\vec{M_2}+\vec{M_3} = (0, 0, r_1F_1\sin\theta_1)+(0, 0, r_2F_2\sin\theta_2)+(0, 0, -r_3F_3\sin\theta_3)$$
$$= (0, 0, r_1F_1\sin\theta_1 + r_2F_2\sin\theta_2 - r_3F_3\sin\theta_3)$$

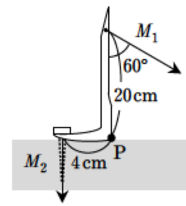
このように剛体に作用する力がすべて同一平面上にあるとき，z 成分のみを考慮し，右回りや左回りを正とみなして力のモーメントを計算することができる。
※上記のモーメントの z 成分は右回りの回転作用を正とみなすことができる。

59 次の問いに答えなさい。

(1) 図の木材に打ち込んである釘を抜き取るには 50 N の力が必要である。支点をPとする釘抜きを使い，矢印の向きに力を加えると，加える力が約何Nを超えると釘は抜きとれるか。次の空欄を埋めることで求めなさい。(M_1は三角比を用い，それ以外は有効数字2桁で答えること)

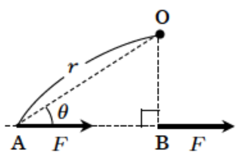


右図のように支点Pのまわりの力のモーメントを考える。加える力のモーメントを M_1，釘抜きが釘から受ける力のモーメントを M_2 とする。釘抜きがちょうど釘から50 Nの力を下向きに受けるときの加える力をx(N)とすると，そのとき釘抜きはぎりぎり回転しないので，$M_1+M_2=0$ が成り立つ。左回りを正とすると，



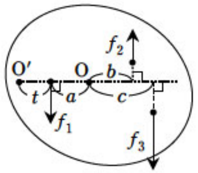
$M_1 =$ (　　　　　) × x(N・m)，$M_2 =$ (　　　　　)(N・m)
となるので，$x =$ (　　　)(N)と求められる。

(2) 図のように剛体上に点O，A，Bがあり，AとBに大きさ F の力を図に示す向きに加える。点Oを回転軸として，A，Bに加える力のモーメントの大きさをそれぞれM_A，M_Bとする。M_A，M_Bをそれぞれ F, r, θ を用いて表しなさい。また，求めた結果から成り立つと考えられる定理を答えなさい。



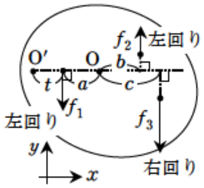
M_A：(　　　　　　　　)　M_B：(　　　　　　　　)　定理：(　　　　　　　　　　　　　　)

例題 2 水平面上に，図のような硬い金属板が置かれている。この金属板に大きさが f_1, f_2, f_3 の力を図のように加えても，金属板が並進運動（位置が変わる運動）も回転運動もしないとき，f_2, f_3 をそれぞれ f_1, a, b, c を用いて表しなさい。



!注意 一般に剛体が並進運動も回転運動もしないとき，どこを回転軸にしても剛体にはたらく力のモーメントの和は 0 である。従って回転についてのつり合いの式は，どの点を回転軸にとってもよい。ただし，剛体が回転している場合は，実際の回転軸を考慮して回転についての運動方程式を立てる必要ある。（詳しくは大学で学習する）

【解法 1】 図の点 O を回転の中心として，力のモーメントのつり合いの式を立てて求める。



左のように xy 軸をとると，y 軸方向に並進運動しないためには，y 軸方向のつり合いの式より，$f_2=f_1+f_3$ …①

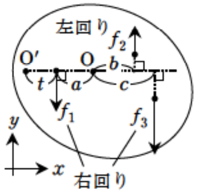
また O のまわりの力のモーメントがつり合うとき，

$af_1+bf_2-cf_3=0$ …②　①,②より，

f_3 を消去して f_2 について解くと，$f_2=\dfrac{a+c}{c-b}f_1$ …(答)

これを①に代入して f_3 について解くと，$f_3=\dfrac{a+b}{c-b}f_1$ …(答)

【解法 2】 図の点 O′ を回転の中心として，力のモーメントのつり合いの式を立てる。



左のように xy 軸をとると，y 軸方向に並進運動しないためには，

$f_2=f_1+f_3$　よって　$-f_1+f_2-f_3=0$ …③

また O′のまわりの力のモーメントがつり合うとき，

$-tf_1+(t+a+b)f_2-(t+a+c)f_3=0$　式変形すると，

$-tf_1+tf_2+(a+b)f_2-tf_3-(a+c)f_3=0$

$t(-f_1+f_2-f_3)+(a+b)f_2-(a+c)f_3=0$　となり，③より，

$(a+b)f_2-(a+c)f_3=0$ …④　となる。③,④より，

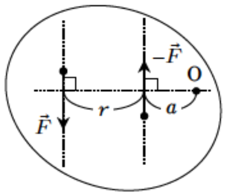
f_3 を消去して f_2 について解くと，$f_2=\dfrac{a+c}{c-b}f_1$ …(答)

これを④に代入して f_3 について解くと，$f_3=\dfrac{a+b}{c-b}f_1$ …(答)

●偶力のモーメント

右図のように，同一直線上になく，互いに平行で逆向きの大きさが等しい 2 つの力 $\vec{F}, -\vec{F}$ が 1 つの物体にはたらくとき，この力の組を偶力（ぐうりょく）という。<u>偶力は物体を並進運動させるはたらきはなく，回転運動させるはたらきしかない</u>。右図において，作用線上にない点 O のまわりの 2 つの力のモーメントの和を，左回りを正として求めると，$M=(r+a)F-aF=rF$

よって偶力のモーメントの大きさは，作用線間距離 ×｜片方の力｜と表される。

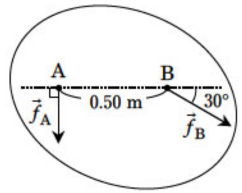


$a \neq 0, d \neq 0$

暗記
偶力のモーメントの大きさ：$M=rF$

重要 偶力のモーメントの大きさは回転軸を考慮することなく，作用線間距離 ×｜片方の力｜で求めることができる。

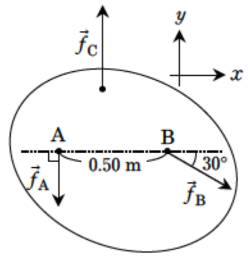
60 水平面上に図のような硬い金属板が置かれている。金属板上の点 A,B にそれぞれ f_A(N), f_B(N)の力を図のように加えるとき，次の問いに答えなさい。ただし，力 $\vec{f}_A, \vec{f}_B$ の大きさをそれぞれ f_A, f_B とし，力のモーメントの大きさは左回りを正，右回りを負とする。



(1) 点 A のまわりの力 $\vec{f}_A$ のモーメントの大きさを M_A，点 A のまわりの力 $\vec{f}_B$ のモーメントの大きさを M_B とする。M_A, M_B をそれぞれ f_A, f_B を用いて表しなさい。

$M_A=$ (　　　　　)(N·m)　$M_B=$ (　　　　　)(N·m)

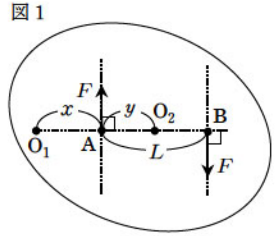
(2) 右図のように AB と x 軸が平行になるように xy 軸をとり，y 軸の正の方向に f_C(N)の力を加えて金属板を x 軸の向きに平行移動させたい。$f_A=30$ N, $f_B=40$ N であるとき，金属板を x 軸の向きに平行移動させるための点 A のまわりの力 $\vec{f}_C$ のモーメントの大きさ M_C，力 $\vec{f}_C$ の大きさ f_C，及びこのモーメントの腕の長さ x を求めなさい。ただし，有効数字は 2 桁で答えること。



$M_C=$(　　　　)N·m　$f_C=$ (　　　　)N　$x=$ (　　　　)m

61 水平面上に薄く硬い金属板があり，金属板上の 2 点 A，B に F(N)の等しい力が平行で逆向きにはたらいている。次の問いに答えなさい。

図 1



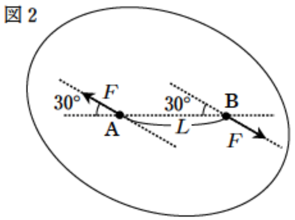
(1) 図 1 のように力がはたらいている場合，O_1 のまわりの力のモーメントの和の大きさ M_1，及び O_2 のまわりの力のモーメントの和の大きさ M_2 をそれぞれ求めなさい。ただし，どちらも左まわりを正とする。

$M_1=$ (　　　　　)(N·m)　$M_2=$ (　　　　　)(N·m)

(2) 次の(　　)を正しく選択もしくは埋めなさい。

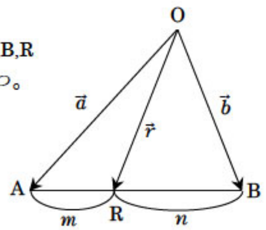
同一の作用線上になく，平行で，大きさが等しく，互いに逆向きの 2 力の組を①(　　　　)といい，図 1 の場合の(①)のモーメントの大きさは②(　　　　)(N·m)である。この(①)は剛体を③(右 ・ 左)まわりに回転させる作用があり，④(　　　　　)させる作用はない。図 2 のように(①)がはたらいている場合，(①)のモーメントの大きさは⑤(　　　)(N·m)である。

図 2



●内分点

△OAB の AB を $m:n$ に内分する点を R とし，O に関する A,B,R の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a},\vec{b},\vec{r}$ とするとき，次の式が成り立つ。



暗記

AB を $m:n$ に内分する点 R の位置ベクトル　$\vec{r}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$

証明　$\vec{r}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{OA}+\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\dfrac{m}{m+n}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$$=\frac{m+n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}-\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OA}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}=\frac{n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m+n}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$$

例題 3　2 点 A $(-4,1)$，B $(5,-2)$ を 2：1 に内分する点 R の座標を求めなさい。

原点 O に関する A,B,R の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{r}$ とすると，

A($\vec{a}$)　B($\vec{b}$) ⟶ 分子は斜めをかけた和

2 ： 1 ⟶ 分母はこの和

$$\vec{r}=\frac{1\vec{a}+2\vec{b}}{2+1}=\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}=\frac{(-4,1)+2(5,-2)}{3}$$

$$=\frac{(-4,1)+(10,-4)}{3}=\frac{(6,-3)}{3}=(2,-1)$$　よって，P(2, −1) …(答)

62 次の問いに答えなさい。

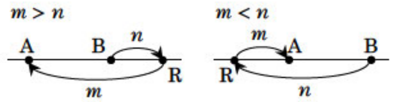
(1) A $(-2,3)$，B $(3,-1)$ を 2：3 に内分する点を P，4：1 に内分する点を Q とするとき，P, Q の座標をそれぞれ求めなさい。　P (　　,　　)　Q (　　,　　)

(2) 数直線上の 2 点 A (-3)，B (5) を 3：1 に内分する点 P の座標を求めなさい。P (　　)

(3) 2 点 P，Q を 2：3 に内分した点を R とする。P の座標が $(-2,1)$，R の座標が $(2,3)$ であるとき，Q の座標を求めなさい。　Q (　　,　　)

●外分点

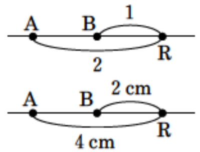
右図のように点 R は直線 AB 上にあり，線分 AB 上にない点で，AR：RB ＝ $m:n$ の関係が成り立っているとき，R は AB を $m:n$ に外分する点であるという。



A から m だけ進み，折り返して n だけ進んで B に到達するとき，折り返し点が外分点 R となる。

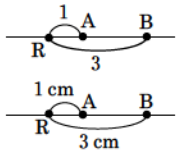
例題 4　次のような点 R を作図しなさい。ただし，AB は 2 cm とする。

(1) AB を 2：1 に外分する点 R



AR：RB＝2：1 なので おおまかな図を描くと AB：BR＝1：1 となる よって，BR＝2 cm と求められる

(2) AB を 1：3 に外分する点 R

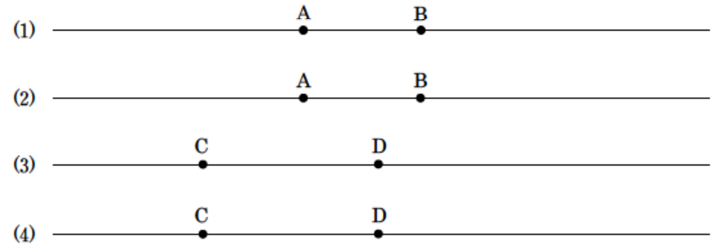


AR：RB＝1：3 なので おおまかな図を描くと RA：AB＝1：2 となる よって，AR＝1 cm と求められる

63 次のような点 P, Q を作図しなさい。ただし，AB は 2 cm，CD は 3 cm とする。

(1) AB を 3：2 に外分する点 P　　(2) AB を 1：3 に外分する点 P

(3) CD を 3：1 に外分する点 Q　　(4) CD を 1：7 に外分する点 Q



★外分点の位置ベクトル

△OAB の AB を $m:n$ に外分する点を R とし，O に関する A,B,R の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a},\vec{b},\vec{r}$ とするとき，次の式が成り立つ。

暗記

AB を $m:n$ に外分する点 R の位置ベクトル　$\vec{r}=\dfrac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$

※証明は数学の教科書を参照

例題 5　2 点 A $(-4,1)$，B $(5,-2)$ を 2：1 に外分する点 R の座標を求めなさい。

原点 O に関する A,B,R の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{r}$ とすると，

A($\vec{a}$)　B($\vec{b}$) ⟶ 分子は斜めをかけた和

2 ： −1 ⟶ 分母はこの和

$$\vec{r}=\frac{-1\vec{a}+2\vec{b}}{2-1}=\frac{-\vec{a}+2\vec{b}}{1}=\frac{-(-4,1)+2(5,-2)}{1}$$

$=(14,-5)$　よって，R(14, −5) …(答)

※2：−1 または −2：1 に内分すると考えればよい！どちらに − を付けても結果は同じ！

●平行な2力の合成

p139でも学習したが，図1のように軽く一様な棒の両端におもりA，Bを取りつけ，棒上の点Oに糸をかけて天井から棒を吊るすと，棒は水平に保たれたまま静止する。

ここで図2のように，糸の張力をT(5 N)，おもりAによる作用をf_A(3 N)，その作用点をS_A，おもりBによる作用をf_B(2 N)，その作用点をS_Bとする。このとき，f_Aとf_Bの合力の作用点はどこになるのかを考えてみよう。

f_Aとf_Bの合力はTと釣り合うと考えられるため，図3のように，作用点がTと一致し，Tと大きさが等しく逆向きであると考えられる。この作用点はS_AS_Bを2：3＝f_B：f_Aに内分した点になっている。

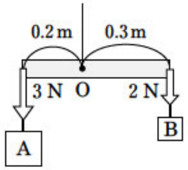
図1


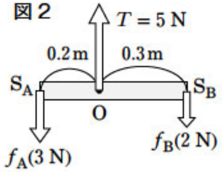
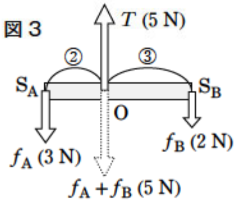
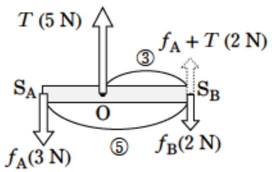
図2


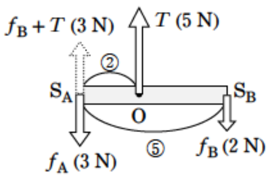
図3


f_A+f_Bの作用点はS_AS_Bを2：3つまり，f_B：f_A(力の大きさの逆比)に内分した点

次にf_AとTの合力，f_BとTの合力について考えてみよう。f_AとTの合力はf_Bと釣り合うと考えられるため，図4−Aのように，作用点がf_Bと一致し，f_Bと大きさが等しく逆向きであると考えられる。この作用点はS_AOを5：3＝T：f_Aに外分した点になっている。同様に，f_BとTの合力はf_Aと釣り合うと考えられるため，図4−Bのように，作用点がf_Aと一致し，f_Aと大きさが等しく逆向きであると考えられる。この作用点はS_BOを5：2＝T：f_Bに外分した点になっている。

図4−A


f_A+Tの作用点はS_AOを5：3つまり，T：f_A(力の大きさの逆比)に外分した点

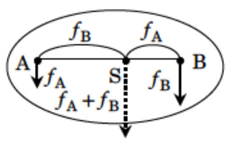
図4−B


f_B+Tの作用点はS_BOを5：2つまり，T：f_B(力の大きさの逆比)に外分した点

暗記

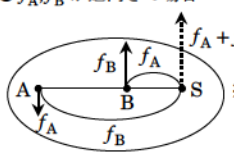
平行な2力f_A,f_B(作用点はそれぞれA,B)の合力の作用点をSとする

●f_A,f_Bが同じ向きの場合



合力の作用点SはABをf_B：f_Aに内分した点

●f_A,f_Bが逆向きの場合



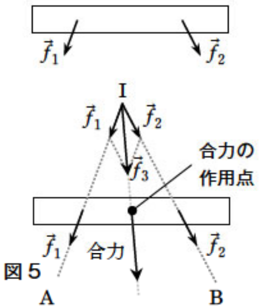
※向きはf_A,f_Bのうち大きい方の向きと同じ

合力の作用点SはABをf_B：f_Aに外分した点

●剛体にはたらく2つの力の合成

右図のように，棒状の剛体に$\vec{f_1}$，$\vec{f_2}$の力が加わっているとき，これらの合力を作用線の定理によって作図してみよう。

図のように$\vec{f_1}$，$\vec{f_2}$それぞれの作用線の交点をIとし，Iを始点とするこれらの合力$\vec{f_3}$を作図する。次に$\vec{f_3}$を作用線に沿って移動し，始点が剛体上に来たところで止めると，剛体上にある合力の作用点と合力を作図することができる。



ここで図5のように，同じ向きの平行な2力$\vec{f_1}$,$\vec{f_2}$がはたらく剛体を考える。各作用点A,Bを始点として$\vec{f_1}$,$\vec{f_2}$に垂直な力$\vec{f}$,$-\vec{f}$を加えても，剛体の運動に影響しない。このときの合力は$\vec{F}=(\vec{f_1}+\vec{f})+(\vec{f_2}-\vec{f})=\vec{f_1}+\vec{f_2}$である。作用線の定理によって，$\vec{f_1}+\vec{f}$と$\vec{f_2}-\vec{f}$及び合力$\vec{F}$の作用線を作図し，$\vec{F}$の作用線とABとの交点をOとすると，△AIO∽△APQであるので，

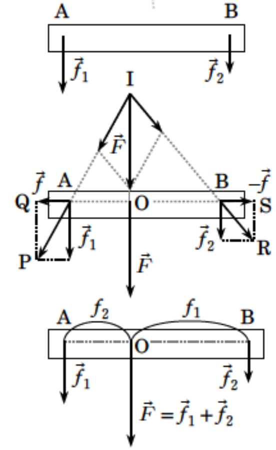
$\frac{AO}{AQ}=\frac{IO}{PQ}$ よって，$\frac{AO}{f}=\frac{IO}{f_1}$ つまり $AO=\frac{f}{f_1}IO$ …①

また，△BIO∽△BRSであるので，

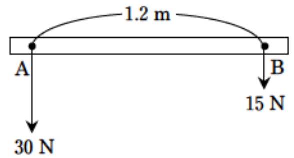
$\frac{BO}{BS}=\frac{IO}{RS}$ よって，$\frac{BO}{f}=\frac{IO}{f_2}$ つまり $BO=\frac{f}{f_2}IO$ …②

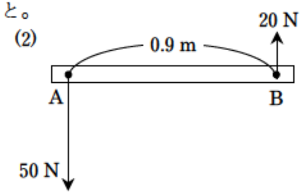
①,②より $AO:BO=\frac{f}{f_1}IO:\frac{f}{f_2}IO=\frac{1}{f_1}:\frac{1}{f_2}=f_2:f_1$

よって，合力の作用点Oは各力の作用点を力の大きさの逆比に内分することがわかる。

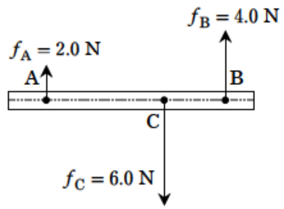
図5


64 次の(1),(2)の剛体のA，Bにはたらく平行な2力の合力を図示し，合力の大きさも書き込みなさい。ただし，合力の作用点は直線AB上にとること。

(1)


(2)


65 図のように，滑らかな水平面上に置かれた軽くて一様な棒の点A，B，Cにそれぞれ2.0 N，4.0 N，6.0 Nの力を直線ABと垂直に加えたところ，棒は静止した。次の問いに答えなさい。ただし，(1),(3)の合力の作用点は直線AB上にあるものとする。



(1) AとBにはたらく力の合力f_{AB}を図に書き込みなさい。

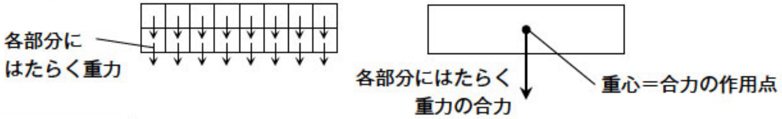
(2) AC：BCをできるだけ簡単な整数の比で表しなさい。（　：　）

(3) AとCにはたらく力の合力f_{AC}を図に書き込みなさい。

(4) (3)の合力f_{AC}の作用点はACをどのような整数の比に外分した点か。（　：　）

●重心

剛体の各部分にはたらく重力の合力の作用点を重心という。



●重心の探し方

物体上の任意の点にひもをつけて吊るし，物体を静止させると，**物体の重心 G はひもの延長線上に必ず存在する。**従って異なる 2 点でひもを吊るすと，下図のように重心を知ることができる。

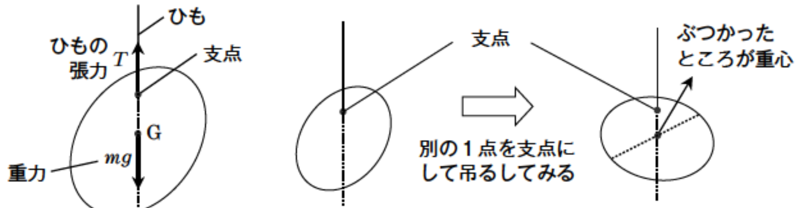
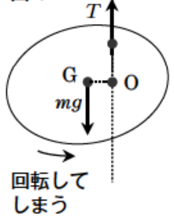


図 1

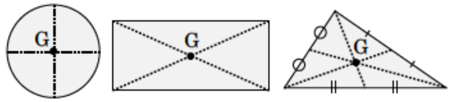


何故ひもの延長線上に重心があるのかを考えてみよう。

図 1 のように，ひもの延長線上に重心がなく，物体が静止していたと仮定する。物体が静止していれば，どの点を回転軸にしても力のモーメントの和は 0 であるはずである。そこで図の点 O を回転軸として，力のモーメントを考えると，重力 mg には左回りの回転作用があり，ひもの張力 T には回転作用がない。よって力のモーメントの和 $\neq 0$ で物体は回転するはずであり，静止することと矛盾する。従って物体が静止するためには，ひもの延長線上に重心 G がなければならない。

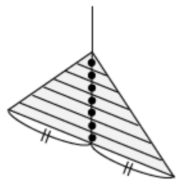
重心 G がひもの延長線上にあれば，点 O のまわりの力のモーメントの和は 0 となり，剛体は回転しないことになる。

●単純な形の物体の重心

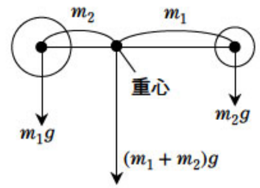


密度が均一であれば，円板では円の中心が重心であり，正方形や長方形の板は対角線の交点が重心である。また，密度が均一な三角形の板の重心は各頂点から引いた中線の交点である。（3 本の中線は必ず 1 点で交わる）

三角形の頂点の 1 つにひもをつけてつり下げて静止させると，やはりひもの延長線上に重心がくる。右図のように三角形が均一の棒の集まりであると考えると，それぞれの棒の重心はその中央にあり，ひもの延長線はその中点をすべて通ると考えられる。従って三角形の重心は，3 本の中線の交点である。



●重心の位置ベクトル



右図のように質量 m_1，m_2 の物体が軽い棒でつながれている。2 つの物体にはたらく重力の大きさは m_1g，m_2g（g は重力加速度の大きさ）で，これらの重力は平行で同じ向きなので，これらの合力の作用点は 2 つの物体の重心間を $m_2 : m_1$ に内分する点である。ところで重心とは，<u>**剛体の各部分にはたらく重力の合力の作用点**</u>であったので，全体の重心は，まさにこの内分点になる。

> **暗記**
> **2 物体を 1 つとみなした物体の重心は，2 物体の重心を質量の逆比に内分する点である**

図 1

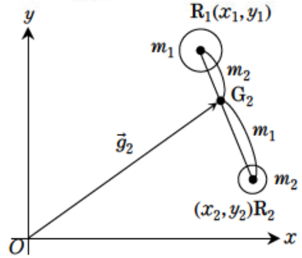
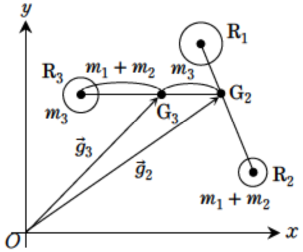


図 1 のように，質量 m_1，m_2 の物体の重心の座標がそれぞれ，$\mathrm{R_1}(x_1, y_1)$，$\mathrm{R_2}(x_2, y_2)$ で，この全体の重心を $\mathrm{G_2}$ とすると，この重心 $\mathrm{G_2}$ の位置ベクトル $\vec{g}_2$ は，$\mathrm{R_1}$ の位置ベクトル $\vec{r}_1$，$\mathrm{R_2}$ の位置ベクトル $\vec{r}_2$ を用いて，内分点の公式により，次のように表すことができる。

$$\vec{g}_2 = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \cdots ①$$

図 2



次に**図 2** のように $\mathrm{R_3}(x_3, y_3)$ に重心がある質量 m_3 の物体が組み合わさったとき，全体の重心 $\mathrm{G_3}$ の位置ベクトル $\vec{g}_3$ はどうなるかを考えてみよう。質量 m_1，m_2 の物体を 1 つの物体とみなすと，質量 m_3 の物体にはたらく重力と，質量 $m_1 + m_2$ の物体にはたらく重力の合力の作用点は，図のようにそれぞれの重心を $(m_1 + m_2) : m_3$ に内分する点であるので，①を用いると全体の重心の位置ベクトルは，

$$\vec{g}_3 = \frac{(m_1 + m_2)\vec{g}_2 + m_3\vec{r}_3}{(m_1 + m_2) + m_3} = \frac{(m_1 + m_2)\dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} + m_3\vec{r}_3}{(m_1 + m_2) + m_3} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

これを繰り返していくと，質量 $m_1, m_2, m_3, \cdots, m_n$ の物体の重心がそれぞれ，$\mathrm{R_1}(x_1, y_1)$，$\mathrm{R_2}(x_2, y_2)$，$\mathrm{R_3}(x_3, y_3) \cdots \mathrm{R}_n(x_n, y_n)$ にあるとき，全体の重心の位置ベクトル $\vec{g}_n$ は次のように表すことができる。

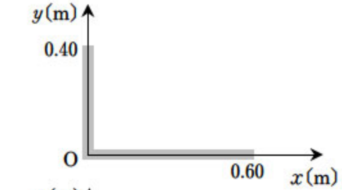
> **暗記**
> **重心の位置ベクトル：**$\boldsymbol{\vec{g}_n = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \cdots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n}}$

なお，このベクトルの成分を求めると，次のようになる。

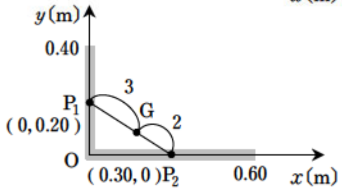
$$\vec{g}_n = \frac{m_1(x_1, y_1) + m_2(x_2, y_2) + m_3(x_3, y_3) + \cdots + m_n(x_n, y_n)}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n}$$

$$= \left(\frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n}, \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + \cdots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n}\right)$$

例題 6 長さ 1.00 m の太さが一様な針金を，図のように直角に折り曲げ，x 軸，y 軸と重ねて置いた。この針金の重心 G の座標を求めなさい。



y 軸上の針金と x 軸上の針金の質量比は 0.40：0.60＝2：3 であるので，それぞれの質量を $2m$，$3m$ とする。また，y 軸上の針金の重心は，図に示すように P_1 (0，0.20)，x 軸上の針金の重心は P_2 (0.30，0) である。原点 O に関する P_1, P_2 の位置ベクトルを $\vec{p}_1$，$\vec{p}_2$，重心 G の位置ベクトルを $\vec{g}$ とすると，



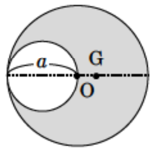
$$\vec{g} = \frac{2m\vec{p}_1 + 3m\vec{p}_2}{2m+3m} = \frac{2m(0, 0.20) + 3m(0.30, 0)}{5m}$$

$$= \frac{(0.90, 0.40)}{5} = (0.18, 0.08)$$

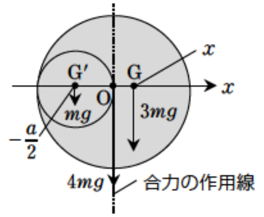
よって，G の座標は **(0.18, 0.08)** …(答)

!注意 G は線分 P_1P_2 を質量の逆比，つまり 3：2 に内分する点になる。

例題 7 中心が O で半径 a(m)の一様な円板がある。図のように半径 $\frac{a}{2}$(m)の円板を切り離したときの，重心 G から中心 O までの距離を求めなさい。



切り抜く円板と切り抜かれた円板の質量比は次のように求めることができる。



右上図のように，切り抜く前の状態に戻し，2 枚の板の質量を m，$3m$ とすると，これらの合力の作用線は O を通るはずである。図のように O を原点とする x 軸をとり，O に関する，切り離された板の重心 G の位置ベクトルを $\vec{p} = (x)$，O に関する，切り抜いた円板の重心 G′ の位置ベクトルを $\vec{p}' = \left(-\frac{a}{2}\right)$ とすると，公式より，

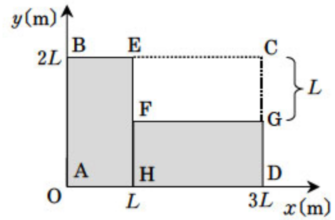
$\vec{0} = \frac{m\vec{p}' + 3m\vec{p}}{m+3m} = \frac{\vec{p}' + 3\vec{p}}{4}$ であるので，これを $\vec{p}$ について解くと

$\vec{p} = -\frac{\vec{p}'}{3} = -\frac{1}{3}\left(-\frac{a}{2}\right) = \left(\frac{a}{6}\right)$　よって，$x = \frac{a}{6}$　となるので，OG $= \frac{a}{6}$ (m) …(答)

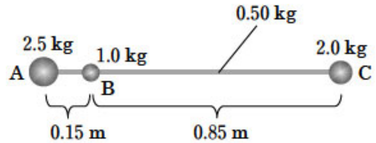
!注意 O は線分 G′G の質量の逆比，つまり 3：1 の内分点であることを利用してもよい。

66 一様な厚さで，辺の長さが $2L$(m)，$3L$(m)の長方形の板 ABCD がある。この板から図のように長方形 EFGC を切り取り，切り取った板を ABEH に重ねた。座標軸を図のようにとったとき，この板の重心 Z の座標を求めなさい。

Z (　　　　,　　　　)

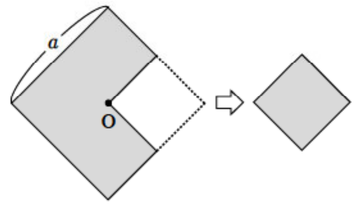


67 図のように 0.50 kg の一様な棒に 2.5 kg，1.0 kg，2.0 kg の 3 つの球 A,B,C が連結されている。この剛体の重心は A から何 m のところにあるか。　(　　　　) m

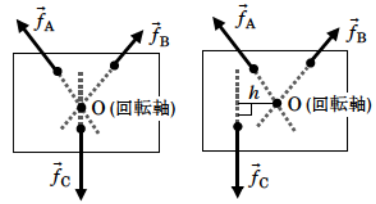


68 一辺が a(m)の厚さが一様な正方形の板がある。図のように $\frac{1}{4}$ の部分を切り離し，残った板の重心を G とするとき，G から点 O までの距離を求めなさい。

(　　　　　　　　)(m)



●互いに平行でない3力の作用線

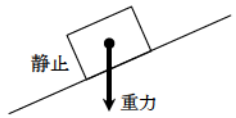


回転しない　　左まわりに回転する

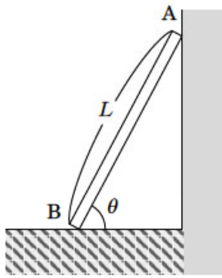
回転していない剛体に互いに平行でない 3 力がはたらいているとき，その 3 力の作用線は 1 点で交わる性質がある。図のように任意の 2 力の作用線の交点を回転軸にすると，残りの力の作用線が O を通る場合，力のモーメントはすべて 0 になるが，通らない場合は腕の長さ h が生じるため，回転してしまう。

4 力以上がはたらいて剛体が回転しない場合は作用線が一致するとは限らないが，いくつかを合成（p51「剛体にはたらく 2 つの力の合成」参照）してはたらく力を 3 力とみなすと，その 3 力の作用線は一点で交わる。

69 右図の粗い斜面上で静止している物体にはたらく斜面からの垂直抗力の作用点 S を図示しなさい。



例題 8　図のように，質量 m，長さ L の太さが一様な棒を滑らかな壁と摩擦のある床に立てかける。棒と床の成す角を θ とするとき，次の問いに答えなさい。ただし，重力加速度の大きさを g とする。

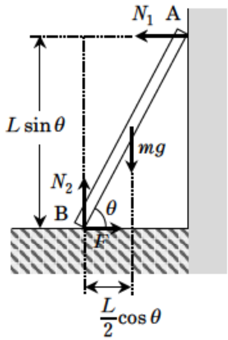


(1) 棒が静止しているとき，棒が壁から受ける垂直抗力の大きさ N_1 と棒が床から受ける垂直抗力の大きさ N_2 及び棒と床との間の摩擦力の大きさ F をそれぞれ求めなさい。

まずは棒にはたらく力をもれなく書き込む。

壁は滑らかなので壁からの摩擦力は無視できることに注意する。水平方向，鉛直方向のつり合いの式を立てると，次のようになる。

水平方向：$F = N_1$ …①　　鉛直方向：$N_2 = mg$ …②



次に力のモーメントのつり合いの式を立てる。棒は静止しているので，どこを回転軸にしてもよい。力が2つはたらいている B を回転軸にすれば，式中の文字が少なくなって楽である。

B のまわりの力のモーメントのつり合い：

$(L\sin\theta)N_1 - \left(\frac{L}{2}\cos\theta\right)mg = 0$　　式を整理すると，

$N_1 = \frac{mg\cos\theta}{2\sin\theta} = \frac{mg}{2\tan\theta}$ …③

①,②,③より，$N_2 = \boldsymbol{mg}$ …(答)　$F = N_1 = \boldsymbol{\frac{mg}{2\tan\theta}}$ …(答)

(2) 棒が倒れないための $\tan\theta$ の範囲を求めなさい。ただし，棒と床との間の静止摩擦係数を μ とする。

摩擦力 F が最大となるのは，μN_2 であるので，$F \leqq \mu N_2$

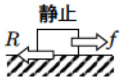
この式に $F = \frac{mg}{2\tan\theta}$，　$N_2 = mg$ を代入すると，

$\frac{mg}{2\tan\theta} \leqq \mu mg$　よって，$\tan\theta \geqq \boldsymbol{\frac{1}{2\mu}}$ …(答)

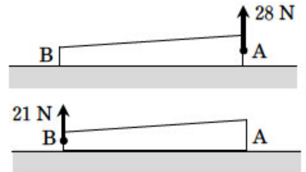
復習

静止摩擦力は一定ではない。また，最大になるときは，次の式で表すことができる。

最大静止摩擦力(R_{max})
＝垂直抗力(N)×静止摩擦係数(μ)

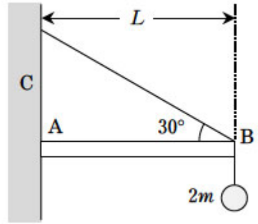


70　床の上に太さが均一でない長さ 1.4 m の木材がある。図のように一端 A を鉛直に持ち上げるのに 28 N の力を要した。また，他端 B を鉛直に持ち上げるのに 21 N の力を要した。木材の質量と，B から重心までの距離を求めなさい。ただし，重力加速度の大きさを $9.8\ \mathrm{m/s^2}$ として，有効数字は 2 桁で答えること。



質量：(　　　　　)kg　B から重心までの距離：(　　　　　)m

71　図のように質量 m(kg)，長さ L(m)の太さが一様な棒の一端 A を鉛直な粗い壁にあて，他端 B と壁面 C を糸で結ぶ。この棒に質量 $2m$(kg)のおもりを B に下げると，棒は水平で糸は棒と 30° の角を成してつり合った。重力加速度の大きさを g ($\mathrm{m/s^2}$)として，次の問いに答えなさい。



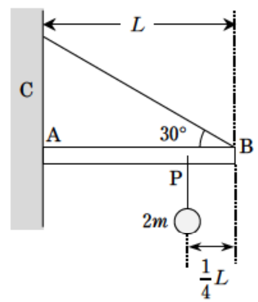
(1) 棒が壁から受けている摩擦力は上向きか，下向きか。

(　　　　　)

(2) このときの糸の張力 T(N)，A 端にはたらく摩擦力 F(N)，壁からの垂直抗力 N(N)の大きさをそれぞれ求めなさい。

T＝(　　　　　)(N)　F＝(　　　　　)(N)　N＝(　　　　　)(N)

次につり下げてあるおもりの位置を A の方にゆっくりずらしていくと，B から $\frac{1}{4}L$ の点 P までは棒は静止したが，この位置から少しでもずらすと A 端が滑り落ちてしまった。



(3) おもりを P の位置に吊るしたときの糸の張力 T'(N)，A 端にはたらく摩擦力 F'(N)，壁からの垂直抗力 N'(N)の大きさをそれぞれ求めなさい。

T'＝(　　　　　)(N)　F'＝(　　　　　)(N)

N'＝(　　　　　)(N)

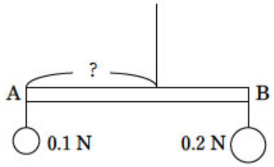
(4) 棒と壁との間の静止摩擦係数 μ を有効数字 2 桁で求めなさい。ただし，$\sqrt{3} = 1.73$ とする。

(　　　　　)

★章末問題★

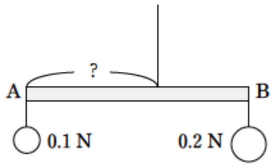
72 次の問いに答えなさい。

(1) 質量が無視できる長さ 0.3 m の太さが一様な棒 AB がある。図のように，棒の A 端，B 端にそれぞれ，重さ 0.1 N，0.2 N のおもりを取りつけ，棒を軽い糸で吊るすとき，棒が水平に保たれたまま静止するには，糸を A から何 m の位置に吊るせばよいか。



A から(　　　　　　　)m の位置

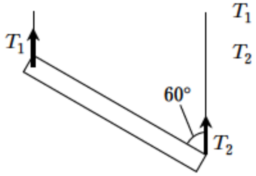
(2) 重さ 1.0 N，長さ 0.3 m の太さが一様な棒 AB がある。図のように，棒の A 端，B 端にそれぞれ，重さ 0.1 N，0.2 N のおもりを取りつけ，棒を軽い糸で吊るすとき，棒が水平に保たれたまま静止するには，糸を A から何 m の位置に吊るせばよいか。有効数字 2 桁で答えなさい。



A から(　　　　　　　)m の位置

73 重さ 60 N，長さ 0.8 m の太さが一様な棒を，次のように糸で吊るして静止させた。図に示してある糸の張力の大きさ T_1，T_2 と長さ x を求めなさい。

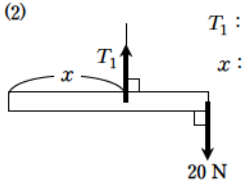
(1)



T_1：(　　　　)N

T_2：(　　　　)N

(2)

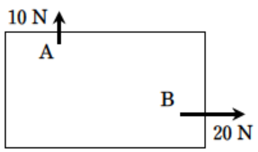


T_1：(　　　　)N

x：(　　　　)m

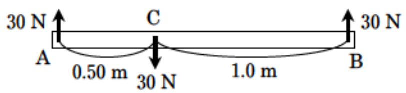
74 次の剛体の各点にはたらく力の合力の作用線を図に書き込みなさい。また，合力の大きさを求めなさい。※根号はそのまま用いてよい。

(1) 合力の大きさ：(　　　　)N



※A,B にはたらく力の向きは互いに垂直

(2) 合力の大きさ：(　　　　)N



※3 つの力の向きはすべて直線 AB と垂直

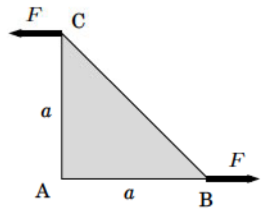
75 次の文中に当てはまるものを記号で選択しなさい。

(1) 長さの単位 m(メートル)，質量の単位を kg(キログラム)，時間の単位を s(秒)に選ぶと，力のモーメントの単位は(　　)である。

ア. kg·m/s　イ. $\mathrm{kg\cdot m^2/s}$　ウ. $\mathrm{kg\cdot m/s^2}$　エ. $\mathrm{kg\cdot m^2/s^2}$　オ. $\mathrm{kg^2\cdot m/s}$　カ. $\mathrm{kg^2\cdot m^2/s}$

(2) AB = AC = a の直角二等辺三角形 ABC の剛体がある。点 B と C に，図のように辺 AB に平行な大きさFの力が互いに逆向きに働いている。このとき，偶力のモーメントの大きさは(　　)である。

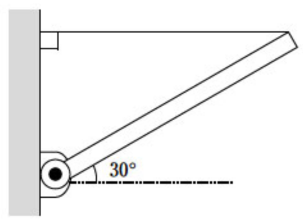
ア. aF　イ. $\sqrt{2}aF$　ウ. $2aF$　エ. $\dfrac{F}{a}$　オ. $\dfrac{\sqrt{2}F}{a}$　カ. $\dfrac{2F}{a}$



(3) 質量 300 g，長さ 1.0 m の一様な棒の両端をA，Bとし，一端 A に 200 g のおもりをつける。おもりのついた棒の重心は，他端 B から(　　)cm のところにある。

ア. 95　イ. 90　ウ. 85　エ. 80　オ. 75　カ. 70

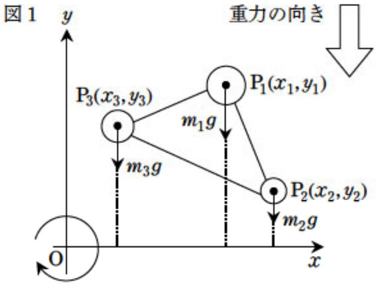
76 図のように長さL(m)，重さW(N)の一様な太さの棒の一端を，壁にちょうつがいで固定した。他端に糸をつけ棒が水平と 30°の角度となるように糸を水平にして壁に固定した。棒にはたらく糸の張力 T，ちょうつがいが棒に及ぼす力の水平成分N，鉛直成分Fの大きさを，Wを用いて表しなさい。



T =(　　　　)(N)　N =(　　　　)(N)

F =(　　　　)(N)

77 次の文中の空欄に当てはまる適切な数式を答えなさい。



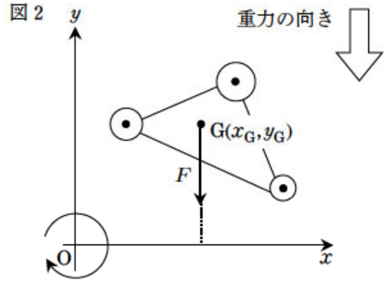


図1のように $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ に質点があり，各質点の質量をそれぞれ m_1, m_2, m_3，重力加速度の大きさを g とする。このとき，原点Oのまわり（右回りを正）の重力のモーメントの和を，$m_1, m_2, m_3, x_1, x_2, x_3, g$ を用いて表すと，

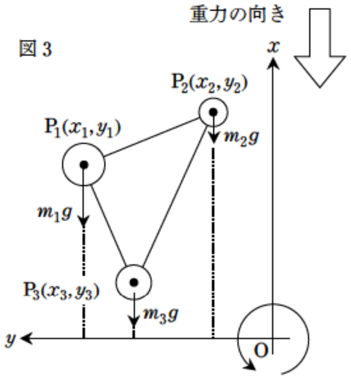
$M =$ ア.(　　　　　　　　　　　　　)…①　となる。

次に，図2のように全体を1つの物体とみなし，この物体の重心の位置を $G(x_G, y_G)$ とすると，この物体にはたらく重力は $F =$ イ.(　　　　　　　　　　　) であるので，原点Oのまわり(右回りを正とする)の重力のモーメントを，x_G, m_1, m_2, m_3, g を用いて表すと，

$M =$ ウ.(　　　　　　　　　　　　　)…②　となる。

①,②は等しいと考えられるので，x_G を $m_1, m_2, m_3, x_1, x_2, x_3$ を用いて表すと，

$x_G =$ エ.(　　　　　　　　　　　　　)



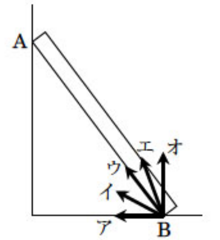
さらに図1を xy 軸も含めて90°回転させると，図3のようになる。このとき x 軸の負の向きに重力がかかるので，原点のまわり（左回りを正とする）の重力のモーメントを同様に考えると，全体の重心の y 座標は，

$y_G =$ オ.(　　　　　　　　　　　　　)

と求められる。よって，重心の位置ベクトル $\vec{r}$ を $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ それぞれの位置ベクトル $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, $\vec{p}_3$ を用いて表すと，

$\vec{r} =$ カ.(　　　　　　　　　　　　　) となる。

78 図のように質量 m(kg)，長さ L(m)のはしご AB を鉛直で滑らかな壁面と粗い水平な床の間に水平から θ の角度で立てかける。重力加速度の大きさを g(m/s^2)として，次の問いに答えなさい。



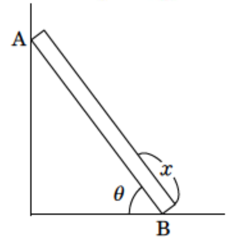
(1) B端にはたらく抗力の向きをア～オの中から選びなさい。(　　)

(2) このはしごを $\tan\theta = \frac{4}{3}$ で質量 $5m$(kg)の人がB端から距離 x(m)だけ登ったとき，B端にはたらく摩擦力 F の大きさを求めなさい。

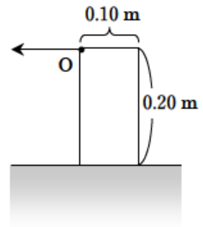
$F =$ (　　　　　　　　)(N)

(3) (2)のとき，人はどこまで登るとはしごは滑り出すか。滑り出すときの x を求めなさい。ただし，床とはしごの間の静止摩擦係数を 0.5 とする。

$x =$ (　　　　　　　)(m)



79 図のように，粗い水平面にある重さ 20 N の一様な直方体を点Oに取り付けたひもで水平方向に引く。引く力の大きさを徐々に大きくしていくと，大きさが F_0(N)に達した直後に直方体は水平方向を滑ることなく傾き始めた。次の問いに答えなさい。

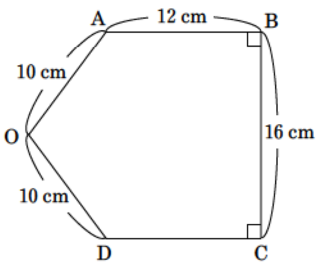


(1) F_0 の値を求めなさい。(　　　　　)(N)

(2) 直方体が水平面上を滑り始める前に傾き始めるには，直方体と水平面との間の静止摩擦係数がある値以上である必要がある。その静止摩擦係数の値を求めなさい。　(　　　　　)

80 図のような厚さの一様な五角形 OABCD の板がある。この板の重心はOから何 cm 離れたところにあるか。小数第1位まで求めなさい。

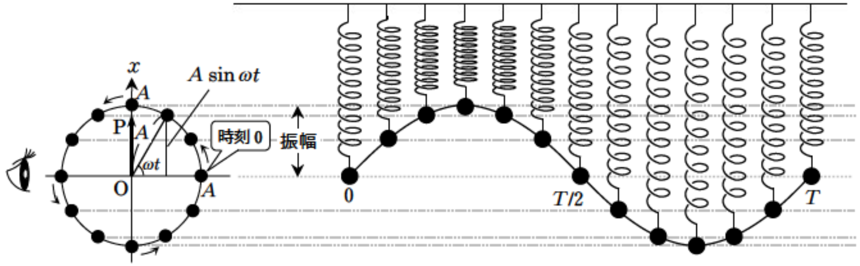
(　　　　　)cm



7章　単振動

●単振動とは

等速円運動は平面上の周期運動なので，図のようにこれを真横から見ると，直線上の往復運動のように見える。この運動を**単振動**といい，ばねにつながれた物体や振れ幅の小さい糸振り子の運動は単振動であることが知られている。



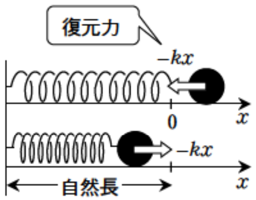
上図は縦軸を x 軸とした座標系で，中心 O（原点），半径 A の円周上を，動点が角速度 ω で等速円運動している様子を表している。時刻 0 の位置から t 秒後の動点の x 軸への射影を P とすると，$\overline{\mathrm{OP}}$ の x 成分は $x = A\sin\omega t$ と表すことができる。これは単振動の時間的変位を表しており，変位 x を時間微分すると速度が得られ，速度を時間微分すると加速度が得られるので，次式が得られる。

変位：$x = A\sin\omega t$ …①　**速度**：$v = \dfrac{dx}{dt} = A\omega\cos\omega t$　**加速度**：$a = \dfrac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\sin\omega t$ …②

①,②より $A\sin\omega t$ を消去すると，$a = -\omega^2 x$ となる。なお単振動では，式中の ω を**角振動数**，A を**振幅**といい，単振動の**周期** T(s) と**振動数** f(Hz) は，等速円運動する動点の周期及び回転数とそれぞれ同じであると定義されており，$T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{2\pi}{\omega}$ が成り立つ。

暗記
$$a = -\omega^2 x \qquad T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

●水平ばね振り子



図のように，滑らかな水平面上で単振動をするばね振り子を考える。ばね定数を k，おもりの質量を m とする。さらに，ばねの端が自然長となる点を原点とし，水平右向きを正として x 軸をとる。単振動の加速度は $-\omega^2 x$ であるので，運動方程式を立てると，フックの法則より，

運動方程式：$m(-\omega^2 x) = -kx$

これを ω について解くと，$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

周期を T とすると，$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

暗記
周期：$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

!注意　図の $-kx$ のような振動の中心に戻そうとする力を**復元力**という。何故マイナス(−)がつくのかを理解しよう。水平右向きを正とすると，$x > 0$ のとき，おもりはばねから左向きに力を受け，$x < 0$ のとき，おもりは右向きに力を受ける。従って，マイナスが必要である。

137　時刻 t(s)での変位が $x = A\sin(\omega t + \theta)$ (m)で表される物体がある。時刻 $t = 0$ で変位は $x = -A$ であるとき，次の問いに答えなさい。（A，ω，θ は定数で $A > 0$，$\omega > 0$ とする）

(1) この物体の運動を何というか。また，式中の ω と A は何を表すか。

運動：(　　　　　)　ω：(　　　　　)　A：(　　　　　)

(2) 定数 θ(rad)の値を求めなさい。ただし，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする。　θ = (　　　　　)

(3) 時刻 t での速度 v(m/s)を，(2)で求めた θ の値を用いて答えなさい。

v = (　　　　　)

(4) 時刻 t での加速度 a(m/s²)を，(2)で求めた θ の値を用いて答えなさい。

a = (　　　　　)

(5) 速さの最大値を求めなさい。　(6) 加速度の大きさの最大値を求めなさい。

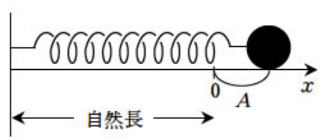
(　　　　　)(m/s)　(　　　　　)(m/s²)

(7) a を x と ω だけの式で表しなさい。　(8) 振動の周期 T(s)を ω と π を用いて表しなさい。

a = (　　　　　)　T = (　　　　　)

(9) ω をこの物体の振動数 f(Hz)と円周率 π を用いて表しなさい。ω = (　　　　　)

138　図のように，滑らかな水平面上に，ばね定数 k(N/m)のばねの一端を固定し，他端に質量 m(kg)のおもりを取りつけ，滑らかな水平面上でおもりを自然長から A(m)だけ伸ばし，静かに放して振動させる。ばねの長さが自然長のときのおもりの位置を原点として，x 軸を水平右向きにとるとき，次の問いに答えなさい。



(1) おもりの加速度を，変位 x(m)と角振動数 ω(rad/s)を用いて表しなさい。

(　　　　　)(m/s²)

(2) 次の空欄を埋めて，おもりの運動方程式を完成させなさい。　$m(-\boxed{}\,x) = -\boxed{}$

(3) 角振動数 ω と周期 T をそれぞれ k, m, π を用いて表しなさい。

ω = (　　　　　)　T = (　　　　　)

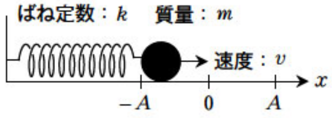
(4) 時刻 $t = 0$ で，引き伸ばしたおもりを放したとして，おもりの時刻 t での変位 x を A, k, m, t を用いて表しなさい。(T と ω は用いないこと)

x = (　　　　　)

●水平ばね振り子のエネルギー保存則

滑らかな水平面上で運動するばね振り子では，ばねにつけられているおもりの運動エネルギーとばねの弾性力による位置エネルギーの和は保存される。そのことを導出してみよう。

右図のように振幅 A で単振動するおもりの運動エネルギーを K，ばねの弾性力による位置エネルギーを U とすると，



$$K+U=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2 \cdots ①$$

ここで時刻 t におけるおもりの変位 x と速度 v は，次のように表すことができる。

$x=A\sin(\omega t+\theta),\ v=A\omega\cos(\omega t+\theta)$ （ω は角振動数，θ は定数）

これを①式に代入すると，$K+U=\frac{1}{2}\underline{m}A^2\underline{\omega^2}\cos^2(\omega t+\theta)+\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\theta)$

一方，運動方程式 $m(-\omega^2 x)=-kx$ より $m\omega^2=k$ となり，下線部分を k に置き換えると，

$$K+U=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\theta)+\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\theta)$$

$$=\frac{1}{2}kA^2\{\cos^2(\omega t+\theta)+\sin^2(\omega t+\theta)\} \quad \to \cos^2(\omega t+\theta)+\sin^2(\omega t+\theta)=1$$

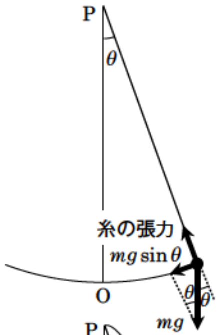
$$=\frac{1}{2}kA^2=\text{一定} \quad \to k\text{ はばね定数，}A\text{ は振幅であるので，}K+U\text{ は一定となる。}$$

※$\frac{1}{2}kA^2$ はばねの伸び縮みが最大のときのばねの弾性力による位置エネルギーを表している。

つまり，運動エネルギーが 0 で弾性力による位置エネルギーが最大のときのエネルギーを表している。

●単振り子の周期

振れ幅の小さい糸振り子は近似的に単振動し，そのように振動する振り子を**単振り子**という。振り子の支点を P，糸の長さを L，おもりの質量を m，重力加速度の大きさを g とし，さらに糸と鉛直線との成す角を θ とすると，おもりにはたらく重力の，円軌道の接線方向の大きさは $mg\sin\theta$ となる。θ が小さいとき，この接線方向の力の向きは水平方向とみなすことができ，この力は**復元力**（振動の中心に戻そうとする力※p102 参照）になる。



右下図のように，線分 OP からおもりまでの距離を x，角振動数を ω として，水平方向の単振動の運動方程式を立てると，

$m(-\omega^2 x)=-mg\sin\theta \cdots ②$　（水平右向きを正とする）

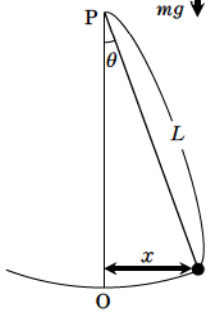
図形的に $\sin\theta=\frac{x}{L}$ であるので，これを②式に代入して，

$m(-\omega^2 x)=-\frac{mg}{L}x$　両辺を $-mx$ で割ると，

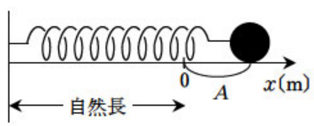
$\omega^2=\frac{g}{L}$ となるので，$\omega=\sqrt{\frac{g}{L}}$

よって，周期は $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

暗記
周期：$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$



139 図のように，滑らかな水平面上に，ばね定数 k(N/m) のばねの一端を固定し，他端に質量 m(kg) のおもりを取りつけ，滑らかな水平面上でおもりを自然長から A(m) だけ伸ばし，静かに放して振動をさせる。ばねの長さが自然長のときのおもりの位置を原点として，x 軸を水平右向きにとるとき，次の問いに答えなさい。



(1) 周期 T(s) と角振動数 ω(rad/s) をそれぞれ k, m, π を用いて表しなさい。

$T=$(　　　　　　)(s)　$\omega=$(　　　　　　)(rad/s)

(2) 時刻 $t=0$ で引き伸ばしたおもりを放したとして，時刻 t(s) でのおもりの変位を，$x=A\sin(\omega t+\theta)$ と表すとき，θ (rad) $\left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ の値を求めなさい。

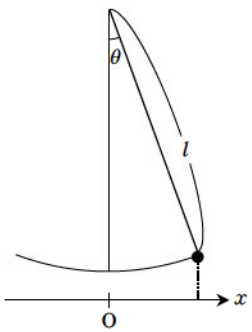
$\theta=$(　　　　　　)(rad)

(3) (1)の x(m) と，おもりの速度 v(m/s) を A, k, m, t, π を用いて表しなさい。ただし，T, ω, θ は用いないこと。

$x=$(　　　　　　)(m)　$v=$(　　　　　　)(m/s)

(4) (3)の結果を利用して，$E=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2$ が一定となることを導きなさい。

140 質量 m(kg) のおもりを長さ l(m) の糸の一端に取り付け，天井から吊るした。おもりを鉛直方向から右側へわずかに傾け，静かに放したところ，おもりは単振動をした。おもりが最下点にくる点を原点として，水平右向きに x 軸をとり，重力加速度の大きさを g(m/s²) として，次の問いに答えなさい。



(1) 糸が鉛直方向から右側へ θ(rad) だけ傾いているとき，次の①～③の問いに答えなさい。

① おもりが糸と垂直な方向に受ける力 F(N) を m, g, θ を用いて表しなさい。

② おもりの変位 x(m) を l, θ で表しなさい。

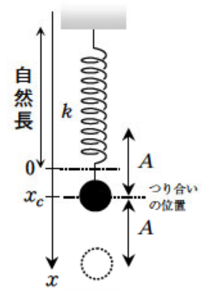
③ F を m, g, l, x を用いて表しなさい。

$F=$(　　　　　　)(N)　$x=$(　　　　　　)(m)　$F=$(　　　　　　)(N)

(2) 水平方向の運動方程式を立てることによって，この単振動の周期 T(s) を g, l, π を用いて表しなさい。

$T=$(　　　　　　)(s)

●鉛直ばね振り子



鉛直方向に単振動するばね振り子を考える。左図のように，ばね定数 k のばねが自然長になるときのばねの下端を原点として，鉛直下向きに x 軸をとる。鉛直に吊るしたばねの下端に質量 m のおもりを静かにとりつける。ばねは自然長より x_c だけ伸びたとして，つり合いの式を立てると，

$mg = kx_c$ より，$x_c = \dfrac{mg}{k}$ …①

さらにおもりを A だけ引き下げ，静かに放すと，おもりはつり合いの位置（$x = x_c$）を中心に振幅 A で単振動する。このことから時刻 t におけるおもりの変位 x，速度 v，加速度 a は，次のように表すことができる。

$x = x_c + A\sin(\omega t + \theta)$ …②　　$v = \dfrac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \theta)$ …③

$a = \dfrac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\sin(\omega t + \theta)$ …④ （ω：角振動数，θ：定数）

②,④より $A\sin(\omega t + \theta)$ を消去すると，$\boldsymbol{a = -\omega^2(x - x_c)}$

よっておもりの運動方程式は次のように表すことができる。

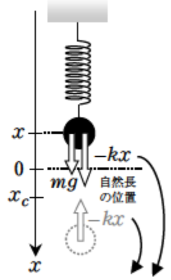
$m\{-\omega^2(x - x_c)\} = -kx + mg$　※下向きが正であることに注意

さらに①式より，x_c を消去して両辺を整理すると，

$-m\omega^2\left(x - \dfrac{mg}{k}\right) = -k\left(x - \dfrac{mg}{k}\right)$　両辺を $-\left(x - \dfrac{mg}{k}\right)$ で割ると，

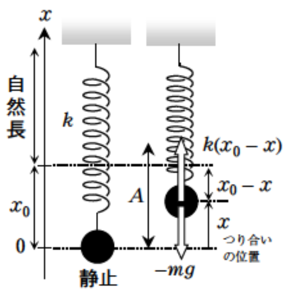
$m\omega^2 = k$　よって，$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

周期を T とすると，$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$



暗記
周期：$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

$x>0, x<0$ のどちらの場合でも弾性力は $-kx$ とマイナスがつく



軸のとり方で式が変わるので注意しよう。左図のように，ばねは自然長から x_0 伸びて，おもりが静止してつり合っていたとする。このつり合いの位置を原点として，鉛直上向きに x 軸をとると，つり合いの式は，$mg = kx_0$ …①′

さらに，振幅 A でおもりを単振動させると，

変位：$x = A\sin(\omega t + \theta)$ …②′

速度：$v = A\omega\cos(\omega t + \theta)$ …③′

加速度：$a = -A\omega^2\sin(\omega t + \theta)$ …④′

②′,④′より，$A\sin(\omega t + \theta)$ を消去すると，

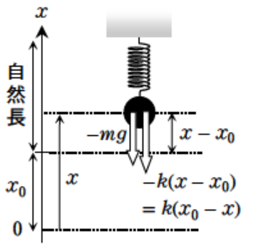
$\boldsymbol{a = -\omega^2 x}$ となるので，運動方程式は

$m(-\omega^2 x) = k(x_0 - x) - mg$　（左図を参照）

①′より，mg を消去して整理すると　$m(-\omega^2 x) = -kx$

よって，$m\omega^2 = k$　これを ω について解くと，

$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ となり，周期は，$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$



※自然長より短い場合でも式は変わらないことを理解しよう！

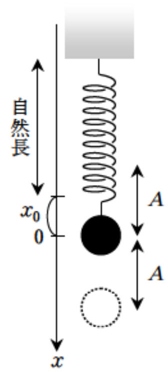
暗記
振動の中心を原点にすると，加速度は $a = -\omega^2 x$
振動の中心を $x = x_c$ にすると，加速度は $a = -\omega^2(x - x_c)$
※軸を上向きにとっても下向きにとっても式は同じ！
※ x や $x - x_c$ は振動の中心からの変位ベクトルと考える

7章

●復元力と弾性力の違い

復元力は「振動の中心方向にはたらく力」であり，**弾性力**は「伸び縮みする物体が自然長に戻ろうとする向きにはたらく力」である。摩擦が無視できる水平ばね振り子の場合，自然長での振り子の位置と振動の中心が一致するため，復元力は弾性力と一致する。一方鉛直ばね振り子の場合，振動の中心は自然長での振り子の位置より下側に来るため，復元力は弾性力と一致せず，振り子にはたらく重力と弾性力の合力に一致する。

141　ばね定数 k(N/m)のばねを天井に吊るし，下端に質量 m(kg)の物体を静かに吊るすと，ばねは自然長から x_0(m)($x_0 > 0$)だけ伸びた。重力加速度の大きさを g(m/s^2)とし，物体が静止している位置を原点として，鉛直下向きに x 軸をとるとき，次の問いに答えなさい。



(1) x_0 を m と k を用いて表しなさい。　$x_0 =$ (　　　　　　　　)(m)

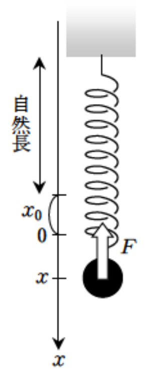
原点で静止している物体を A(m)($A > 0$)引き伸ばして静かに放すと，物体は角振動数 ω(rad/s)($\omega > 0$)で単振動した。

(2) 単振動している物体が原点を下向きに通過するときの時刻を $t = 0$ とする。時刻 t(s)での物体の変位 x(m)，速度 v(m/s)，加速度 a(m/s^2)を求めなさい。

$x =$ (　　　　　　　　)(m)　　$v =$ (　　　　　　　　)(m/s)

$a =$ (　　　　　　　　)(m/s^2)

(3) (2)の結果より，加速度 a を ω と x だけで表しなさい。$a =$ (　　　　　　)



(4) おもりの変位が x のときのおもりがばねから受ける力 F(N)を k，x_0，x だけで表しなさい。ただし，F は鉛直下向きを正とする。

$F =$ (　　　　　　　　)(N)

(5) 運動方程式を立てることによって，ω を k と m だけで表しなさい。

$\omega =$ (　　　　　　)(rad/s)

(6) (1),(5)の結果より，この振動の周期 T(s)を π, m, k だけで表しなさい。

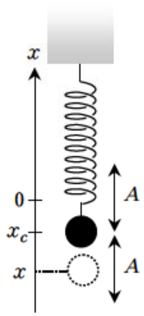
$T =$ (　　　　　　)(s)

7章

●鉛直ばね振り子のエネルギー保存則

鉛直に運動するばね振り子では，力学的エネルギー（おもりの運動エネルギーとばねの弾性力による位置エネルギーとおもりの重力による位置エネルギーの和）は保存される。そのことを導出してみよう。

右図のように，自然長のばねの下端を原点として，鉛直上向きに x 軸をとる。ばね定数を k，おもりの質量を m，重力加速度の大きさを g，おもりが静止してつり合っているときのおもりの変位を $x=x_c\ (x_c<0)$ とする。



つり合いの式は　$mg=-kx_c$ …①′　　よって，$x_c=-\dfrac{mg}{k}$ …①

おもりが振幅 A で単振動しているとき，時刻 $t=0$ でおもりの変位が $x=x_c$ であるとすると，時刻 t でのおもりの変位 x，速度 v，加速度 a は角振動数 ω を用いて次のように表すことができる。

$x=x_c+A\sin\omega t$ …②　　$v=A\omega\cos\omega t$ …③　　$a=-A\omega^2\sin\omega t$ …④

②,④より $A\sin\omega t$ を消去すると $a=-\omega^2(x-x_c)$ となり，おもりの運動方程式は，
$m\{-\omega^2(x-x_c)\}=-kx-mg$　と表される。
さらに①式より，x_c を消去して両辺を整理すると，

$-m\omega^2\left(x+\dfrac{mg}{k}\right)=-k\left(x+\dfrac{mg}{k}\right)$　　両辺を $-\left(x+\dfrac{mg}{k}\right)$ で割ると，$m\omega^2=k$ …⑤

おもりの運動エネルギーとばねの弾性力による位置エネルギーとおもりの重力による位置エネルギーの和を E とし，重力による位置エネルギーの基準を原点にすると，

$E=\dfrac{1}{2}mv^2+\dfrac{1}{2}kx^2+mgx$ …⑥　となる。②,③より x,v を消去すると，

$$E=\frac{1}{2}\underline{m}A^2\underline{\omega}^2\cos^2\omega t+\frac{1}{2}k(x_c+A\sin\omega t)^2+\underline{mg}(x_c+A\sin\omega t)$$

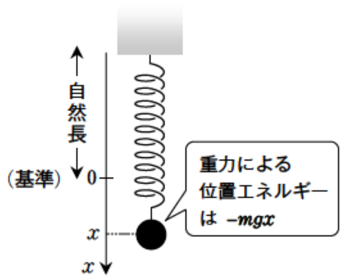
⑤式の $k=m\omega^2$　①′式の $mg=-kx_c$　より，上式の下線部を置き換えると，

$$\begin{aligned}E&=\frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t+\frac{1}{2}k(x_c+A\sin\omega t)^2-kx_c(x_c+A\sin\omega t)\\&=\frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t+\frac{1}{2}k(x_c^2+2x_cA\sin\omega t+A^2\sin^2\omega t)-kx_c(x_c+A\sin\omega t)\\&=\frac{1}{2}kA^2(\cos^2\omega t+\sin^2\omega t)+\frac{1}{2}kx_c^2+kx_cA\sin\omega t-kx_c^2-kx_cA\sin\omega t\\&=\frac{1}{2}kA^2-\frac{1}{2}kx_c^2=\text{一定}\ \cdots⑦\end{aligned}$$

（k, A, x_c は定数であるため一定となる）

よって，力学的エネルギーは保存される。

!注意　鉛直下向きを正として，重力による位置エネルギーの基準をばねの自然長の位置（原点）とすると，
力学的エネルギー $=\dfrac{1}{2}mv^2+\dfrac{1}{2}kx^2-mgx$
軸の向きで重力による位置エネルギーの式が変わってくるので注意しよう。



また，⑥,⑦より，$\dfrac{1}{2}mv^2+\dfrac{1}{2}kx^2+mgx=\dfrac{1}{2}kA^2-\dfrac{1}{2}kx_c^2$ が成り立つ。

この式をさらに変形してみる。

$\dfrac{1}{2}kx_c^2$ を左辺に移項すると，

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2+mgx+\frac{1}{2}kx_c^2=\frac{1}{2}kA^2$$

①′の $mg=-kx_c$ より mg を $-kx_c$ に置き換えて，

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2-kx_cx+\frac{1}{2}kx_c^2=\frac{1}{2}kA^2$$
$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}k(x^2-2x_cx+x_c^2)=\frac{1}{2}kA^2$$
$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}k(x-x_c)^2=\frac{1}{2}kA^2$$

暗記

●水平方向のばね振り子のエネルギー保存則

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=\text{一定}$$

x：振動の中心からの変位
＝自然長の位置からの変位

●鉛直方向のばね振り子のエネルギー保存則

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kX^2=\text{一定}$$

X：振動の中心からの変位
≠自然長の位置からの変位

※ $x-x_c$ は振動の中心からの変位を表しているので，この式は水平方向のばね振子のエネルギー保存則の式と対応していることがわかる。

142　質量 m(kg)の物体をばね定数 k(N/m)のばねにつなぎ，天井に吊るした。重力加速度の大きさを g(m/s^2)として，次の問いに答えなさい。

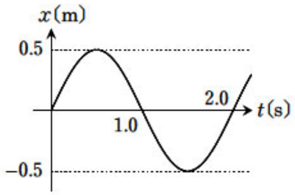
(1) 物体が静止して，物体にはたらく力がつり合っているとき，ばねの自然長からの伸びを求めなさい。　(　　　　　　)(m)

物体が静止している状態から，さらにばねを A(m)伸ばして静かに放すと，物体は単振動した。

(2) つり合いの位置を通過するときの，物体の速さを求めなさい。　(　　　　　　)(m/s)

(3) ばねが自然長になるときの，物体の速さを求めなさい。　(　　　　　　)(m/s)

例題 1　右図は，単振動する物体の振動の中心からの変位 x と時刻 t の関係を表したグラフである。



(1) この単振動の振幅 A，周期 T，角振動数 ω をそれぞれ求めなさい。ただし，π は小数に直し，有効数字は2桁で答えること。

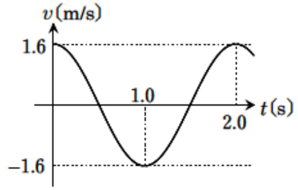
振幅と周期はグラフの目盛から読み取る。

振幅：$A = \mathbf{0.50\ m}$ …(答)　周期：$T = \mathbf{2.0\ s}$ …(答)

角振動数：$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{2.0} = \pi \fallingdotseq \mathbf{3.1\ rad/s}$ …(答)

(2) このグラフの変位 x を t とπの式で表しなさい。

グラフは原点を通り，原点から増加していることに注意すると，(1)から $\omega = \pi$ より，$x = \mathbf{0.50 \sin \pi t}$ …(答)

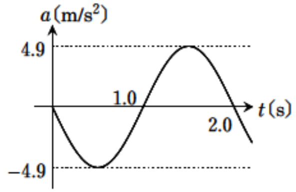


(3) この物体の速度 v と時刻 t の関係，及び加速度 a と時刻 t の関係を求め，それらのグラフも書きなさい。

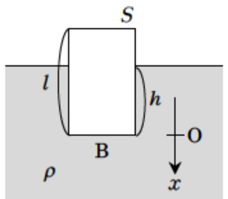
(2)の式から，v, a は以下のようになる。(グラフは右)

$v = \dfrac{dx}{dt} = 0.5\pi \cos \pi t \fallingdotseq \mathbf{1.6 \cos \pi t}$ …(答)

$a = \dfrac{d^2x}{dt^2} = -0.5\pi^2 \sin \pi t \fallingdotseq \mathbf{-4.9 \sin \pi t}$ …(答)



例題 2　長さ l(m)，断面積 S(m^2)の直方体の木片を，密度 ρ(kg/m^3)の水に浮かべたら，h(m)の深さで静止した。さらに木片を少し押して放すと木片は単振動を始めた。重力加速度の大きさを g(m/s^2)，水の抵抗はないものとする。



(1) 木片の密度 ρ_1(kg/m^3)を求めなさい。

静止状態では，重力と浮力がつり合っていることから式を考える。木片の質量を m(kg)とすると，$\rho_1 = \dfrac{m}{Sl}$ となり，

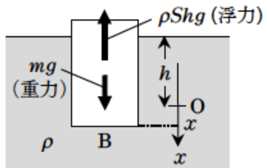
$m = \rho_1 Sl$　よって物体にはたらく重力 $mg = \rho_1 Slg$ …①

静止状態のときの水面下の木片の体積を V(m^3)とすると，

浮力　$\rho Vg = \rho Shg$ …②

①,②より，$\rho_1 Slg$ (重力) $= \rho Shg$ (浮力) …③

よって，$\rho_1 = \dfrac{\rho Shg}{Slg} = \mathbf{\dfrac{\rho h}{l}}$ …(答)



(2) 静止状態での木片の底 B の位置を原点として鉛直下向きに x 軸をとる。振動中に底 B が位置 x に達したときの鉛直方向の合力 F（x 軸の向きを正）を求めなさい。

③より，重力 $= \rho Shg$，右上図より，浮力 $= \rho S(h+x)g$

$F =$ 重力 − 浮力 $= \rho hSg - \rho S(h+x)g = \mathbf{-\rho Sgx}$ …(答)

復習
浮力 $\mathbf{F = \rho Vg}$
流体の密度×体積×重力加速度

(3) 振動の周期 T を求めなさい。

単振動であるので，角振動数を ω として運動方程式を立てると，(2)より，

$m(-\omega^2 x) = -\rho Sgx$ …(※) よって，$\omega = \sqrt{\dfrac{\rho Sg}{m}}$ …③

(1)より，$m = \rho_1 Sl = \dfrac{\rho h}{l} \cdot Sl = \rho Sh$ …④　③,④より，

$\omega = \sqrt{\dfrac{\rho Sg}{\rho Sh}} = \sqrt{\dfrac{g}{h}}$　よって，$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \mathbf{2\pi\sqrt{\dfrac{h}{g}}}$ …(答)

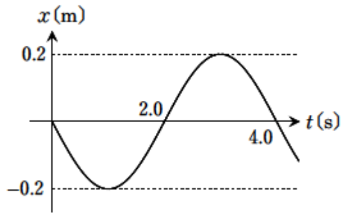
【別解】 この振動がばね定数 k のばねによる振動とみなすと，

(※)より，$-\rho Sgx = -kx$

よって，$k = \rho Sg$ となるので，

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\rho Sh}{\rho Sg}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{h}{g}}$

143　右図は，単振動する物体の振動の中心からの変位 x と時刻 t の関係を表したグラフである。次の問いに答えなさい。



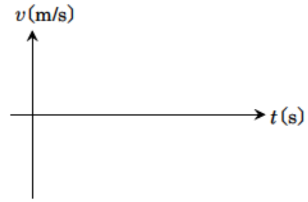
(1) この単振動の振幅 A，周期 T，角振動数 ω をそれぞれ有効数字は2桁で求めなさい。

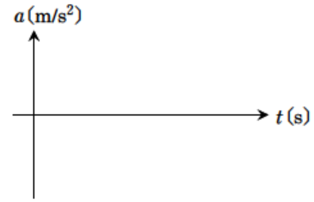
(2) このグラフの変位 x を t と π の式で表しなさい。

(3) この物体の速度 v と時刻 t の関係，及び加速度 a と時刻 t の関係を示すグラフを書きなさい。ただし，目盛りは有効数字2桁で記入すること。

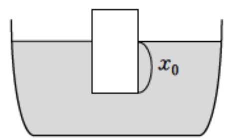
(1) A :（　　　　）(m)　T :（　　　　）(s)　ω :（　　　　）(rad/s)　(2) $x =$（　　　　　　）

(3)





144　質量 M(kg)，断面積 S(m^2)の円柱状の物体が，図のように液体中に浮いた状態で静止している。重力加速度の大きさを g(m/s^2)として次の問いに答えなさい。



(1) 物体の液体中に沈んでいる部分の長さを x_0(m)とすると，液体の密度 ρ(kg/m^3)はいくらか。　$\rho =$（　　　　　）

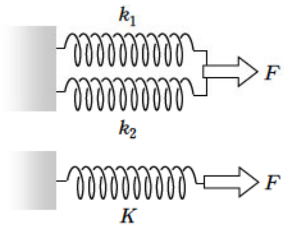
(2) 図の状態から物体を引き上げ，静かに放すと単振動をした。この単振動の周期 T(s)を求めなさい。

$T =$（　　　　　）

●合成ばね定数

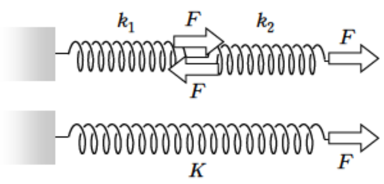
並列や直列につながれた複数のばねを 1 つのばねとみなすとき，その 1 つのばねのばね定数を**合成ばね定数**という。

●ばね定数 k_1, k_2 のばねを並列につなぐ場合



左図のように，並列につながれたばねを力 F で水平方向に引っ張るとすると，2 つのばねは同じ長さだけ伸びるので，その長さを x とすると，$F=k_1x+k_2x$ …①
一方，合成ばね定数を K とすると，合成した 1 つのばねも F で引っ張ると x だけ伸びるので，$F=Kx$ …②
①,②より F を消去すると，$Kx=k_1x+k_2x$
両辺を x で割ると，$\boldsymbol{K=k_1+k_2}$　となる。

●ばね定数 k_1, k_2 のばねを直列につなぐ場合



左図のように，直列につながれたばねを，水平方向に力 F で引っぱるとする。k_2 のばねを右向きに力 F で引っ張り，静止させると，ばねにはたらく力はつり合うので，k_2 のばねは，k_1 のばねから同じ大きさの力 F を左向きに受けることになる。このとき，作用・反作用の法則によって，k_1 のばねには，同じ大きさの力 F が右向きにはたらくことになる。つまり，2 つのばねには，どちらも同じ力 F が作用することになる。

よって，直列につないだばねに力 F を作用させたときの，k_1 のばねの伸びを x_1，k_2 のばねの伸びを x_2 とすると，次の式が成り立つ。

$F=k_1x_1 \ \rightarrow\ x_1=\dfrac{F}{k_1}$ …①　$F=k_2x_2 \ \rightarrow\ x_2=\dfrac{F}{k_2}$ …② ⟶

ばね定数が異なるばねに同じ力が作用するわけだから，ばねの伸びは異なる！

一方，合成ばね定数を K とすると，合成した 1 つのばねは F で引っ張られると，x_1+x_2 だけ伸びることになる。よってつり合いの式は，次のようになる。

$$F=K(x_1+x_2)\ \rightarrow\ x_1+x_2=\frac{F}{K}\ \cdots③$$

①,②式を③式に代入すると，$\dfrac{F}{k_1}+\dfrac{F}{k_2}=\dfrac{F}{K}$　両辺を F で割ると，$\boldsymbol{\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}=\dfrac{1}{K}}$

> **暗記**
> **合成ばね定数を K とするとき，**
> **並列の場合：$K=k_1+k_2$　直列の場合：$\dfrac{1}{K}=\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}$**

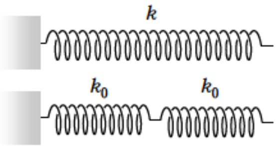
・ばね定数が k_1, k_2, k_3 のばねを並列につないだときの合成ばね定数 K_3 を求めてみる。
　k_1, k_2 の合成ばね定数を K_2 とすると，$K_2=k_1+k_2$
　K_2 と k_3 の合成ばね定数が K_3 であるので，$K_3=K_2+k_3=k_1+k_2+k_3$

・ばね定数が k_1, k_2, k_3 のばねを直列につないだときの合成ばね定数 K_3 を求めてみる。

　k_1, k_2 の合成ばね定数を K_2 とすると，$\dfrac{1}{K_2}=\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}$
　K_2 と k_3 の合成ばね定数が K_3 であるので，$\dfrac{1}{K_3}=\dfrac{1}{K_2}+\dfrac{1}{k_3}=\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}+\dfrac{1}{k_3}$

これらのことから，一般にばね定数が $k_1, k_2, k_3 \cdots k_n$ の n 本のばねを並列，直列につなぐときの合成ばね定数 K_n は，それぞれ次のようになることがわかる。

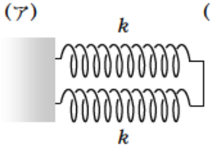
> **暗記**
> **並列：$K_n=k_1+k_2+k_3+\cdots+k_n$　直列：$\dfrac{1}{K_n}=\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}+\dfrac{1}{k_3}+\cdots+\dfrac{1}{k_n}$**

> **例題 3**　ばね定数 k のばねを半分に切ったとき，半分の長さになったばねのばね定数を求めなさい。
>
> 
>
>
> 半分になったばねのばね定数を k_0 とすると，ばね定数 k_0 のばねを 2 本直列につないでできるばねの合成ばね定数が k であるとみなすことができる。よって，
> $\dfrac{1}{k}=\dfrac{1}{k_0}+\dfrac{1}{k_0}$ となり，$\dfrac{1}{k}=\dfrac{2}{k_0}$　つまり，$k_0=2k$ …(答)

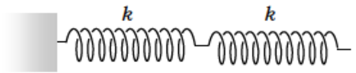
145 次の問いに答えなさい。

(1) ばね定数 k のばねを次のようにつないだ場合の合成ばね定数を求めなさい。

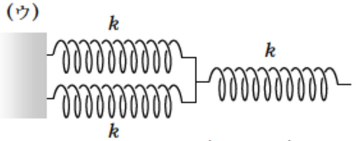
(ア)　(　　　)



(イ)　(　　　)



(ウ)



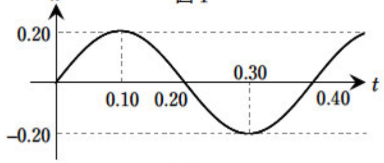
(　　　)

(2) ばね定数 k のばねを切断して 3 等分し，切断した 3 つを並列に接続すると，合成ばね定数はいくらになるか。
(　　　　　)

★章末問題★

146 変位 x と時刻 t の関係が図1のように表される単振動がある。次の問いに答えなさい。

図1

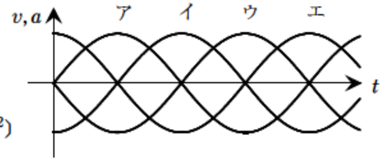


(1) この単振動の振幅 A(m)，周期 T(s)，振動数 f(Hz)をそれぞれ有効数字2桁で求めなさい。

A＝(　　　　　)(s)　T＝(　　　　　)(s)

f＝(　　　　　)(Hz)

図2



(2) この単振動の速度，加速度の大きさの最大値 v_{max}(m/s)，a_{max}(m/s^2)をそれぞれ有効数字2桁で求めなさい。

v_{max}＝(　　　　　)(m/s)　a_{max}＝(　　　　　)(m/s^2)

(3) この単振動の速度，加速度を表すグラフは図2のア～エのどれか。ただし，縦軸は速度または加速度の大きさを表すものとする。

速度：(　　　)　加速度：(　　　)

147 次の問いに答えなさい。ただし，地球上での重力加速度の大きさを g(m/s^2)とする。

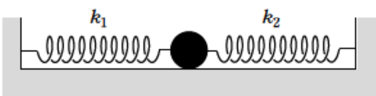
(1) 長さ l(m)の糸に質量 m(kg)の物体を吊るして単振り子をつくる。この単振り子の周期を求めなさい。　(　　　　　)(s)

(2) (1)の単振り子の糸の長さを2倍にし，吊るす物体の質量を3倍にする。この単振り子を月面上で振動させた場合，振動の周期は(1)の周期の何倍になるか。ただし，月面上の物体にはたらく重力の大きさは地球上の6分の1とする。　(　　　)倍

(3) ばね定数 k(N/m)のばねに質量 m(kg)のおもりをつけて振動させるとき，振動の周期を求めなさい。　(　　　　　)(s)

(4) (3)のばねを切って元の長さの半分にし，質量 $2m$(kg)のおもりをつけて振動させるとき，振動の周期は(3)の周期の何倍になるか。　(　　　)倍

148 図のように滑らかな水平面上の質量 m(kg)の物体が，ばね定数がそれぞれ k_1(N/m), k_2(N/m)のばねに結びつけられて静止している。最初はどちらのばねも自然長であったとする。外力を加え物体を右向きに距離 A(m)だけ移動させて静かに放すと物体は単振動をした。



(1) この単振動の周期を求めなさい。　(　　　　　)(s)

(2) 物体の速さの最大値を求めなさい。　(　　　　　)(m/s)

149 質量 0.40 kg の物体が振幅 0.75 m の単振動をしている。時刻0のとき，物体は振動の中心Oを正の向きに速さ 6.0 m/s で通過した。有効数字2桁で次の問いに答えなさい。

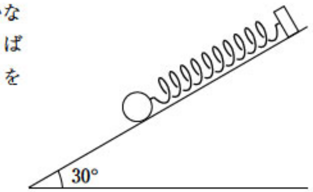
(1) この単振動の振動数を求めなさい。(　　　　　)Hz

(2) 点Oから 0.45 m 離れた点における物体の速さを求めなさい。(　　　　　)m/s

(3) 点Oから負の向きに 0.30 m だけ変位した点ではたらく力の大きさと向きを求めなさい。

(正・負)の向き　(　　　　　)N

150 ばね定数 k(N/m)の軽いばねを右図のような滑らかな斜面上に置き，質量 m(kg)の小物体を吊るしたところ，ばねは x_0(m)伸びてつり合った。重力加速度の大きさを g(m/s^2)として，次の問いに答えなさい。



(1) ばねの伸び x_0 を k, m, g を用いて表しなさい。

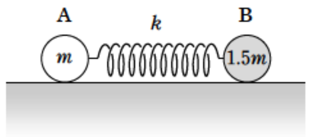
x_0＝(　　　　　)

小物体を斜面下方に少し引き下げ，静かに手を放したところ，小物体は単振動を始めた。

(2) 単振動の周期 T(s)を k, m を用いて表しなさい。

T＝(　　　　　)

151 図のように，ばね定数 k の軽いばねの両端に質量 m, $1.5m$ の物体A，Bをつけ，滑らかな水平面上に置く。ばねを縮めて静かに放すと，AとBの重心から見た各物体はそれぞれ単振動をした。次の問いに答えなさい。

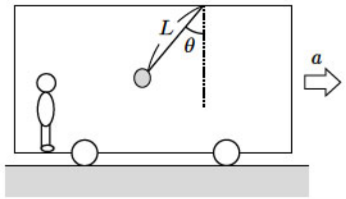


(1) 仮にAとBの重心の位置でばねを切断したとき，Aと接触している方のばねのばね定数はいくらか。

(　　　　　)

(2) Aの単振動の周期はいくらか。　(　　　　　)

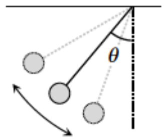
152 地面に対して水平方向に等加速度直線運動をしている電車内で，質量 m のおもりを軽い糸につけてつり下げ，電車内からおもりを見ると，糸は鉛直線から θ だけ傾いて静止した。電車の地表に対する加速度の大きさを a，重力加速度の大きさを g として次の問いに答えなさい。



(1) おもりが糸から受ける力の大きさ S を a, m, g を用いて表しなさい。

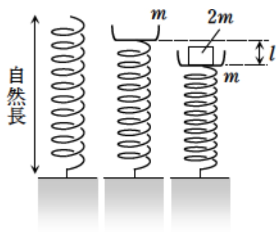
(2) $\tan\theta$ を a, g を用いて表しなさい。

(3) 糸がたるまないようにおもりを静止している位置から少しずらして静かに放したところ，おもりは振動した。この振動の周期 T はいくらか。ただし，糸の長さを L とし，答えに θ は用いないものとする。



(1) $S =$ (　　　　　　　　)　(2) $\tan\theta =$ (　　　　　　　　)　(3) $T =$ (　　　　　　　　)

153 図のように下端を水平面に固定したばねの上端に質量 m の皿を載せると，ばねは自然長からある長さだけ縮んでつり合った。この皿の上に質量 $2m$ のおもりを載せると，さらに l だけ縮んでつり合った。この状態でおもりをわずかに押し下げ，静かに放すと，おもりと皿は離れることなく一体となって単振動した。次の問いに答えなさい。



(1) このばねのばね定数を求めなさい。(　　　　　　　　)

(2) この単振動の周期を求めなさい。(　　　　　　　　)

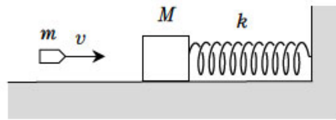
(3) おもりが皿から離れないためには，振幅はいくらより小さくなければいけないか。

(　　　　　　　　)

(4) 初めに皿を大きく押し下げて放すと，おもりは皿から離れて飛んだ。おもりが皿から離れたとき，ばねは自然長からどれだけ縮んでいたか。

(　　　　　　　　)

154 図のように，滑らかな水平面上に，ばね定数 k の軽いばねにつながれた質量 M の物体が置かれており，ばねは壁に固定されている。そこに質量 m の弾丸が速さ v で右向きに飛んできて，物体に衝突した後，物体と一体となってばねを押し縮めた。弾丸が物体に接触してから物体と一体となるまでの間のばねの縮みは小さく無視できるものとして，次の問いに答えなさい。



(1) 弾丸と物体の運動量及び力学的エネルギーの総和は衝突前と一体となった直後で保存されるか。

運動量：(　される・されない　)，力学的エネルギー：(　される・されない　)

(2) 一体となった直後の物体と弾丸の速さを求めなさい。(　　　　　　　　)

(3) 衝突後，物体と弾丸が単振動したとき，その振幅と角振動数を求めなさい。

振幅：(　　　　　　　　)，角振動数：(　　　　　　　　)

155 底面積 S，高さ L の円柱状の木片を，木片よりも十分大きい水槽の水に浮かべ，その運動について考える。木片は水中を抵抗なく滑らかに運動し，水面のゆれや表面張力は無視する。また，すべての運動は鉛直方向のみを考え，横揺れや回転運動はしないものとする。水の密度を ρ，木片の密度 $\dfrac{\rho}{4}$，重力加速度の大きさを g として，次の問いに答えなさい。

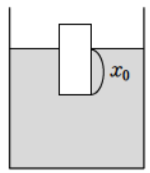


図 1

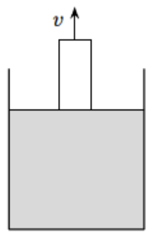


図 2

(1) 図 1 のように，木片が静止しているとき，水面から木片の底面までの深さ x_0 を求めなさい。

(2) 木片を静止状態からわずかに水中に押し下げ，静かに放したところ，木片は上下に周期運動を始めた。その周期 T を求めなさい。

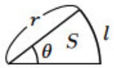
(3) 次に，木片の上面が水面と同じになるまで押し下げ，静かに放すと，図 2 のように，木片は水中から飛び出した。木片の底面が水面と同じ高さになったときの木片の速さを求めなさい。

(1) $x_0 =$ (　　　　　　　　)　(2) $T =$ (　　　　　　　　)　(3) $v =$ (　　　　　　　　)

●弧度法

$180° = \pi\ \mathrm{rad}$ (ラジアン)

※中心角が弧度法で表されているとき



$l = r\theta$

$S = \frac{1}{2}lr$

扇形を底辺 l，高さ r の三角形とみなすと面積の求め方は三角形の場合と同じ！

●三角比の変換公式

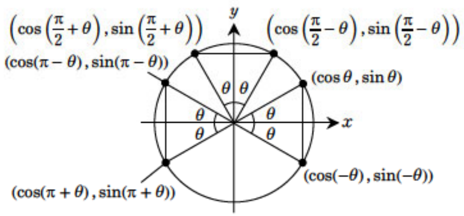
$\cos(-\theta) = \cos\theta$ 　　$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$ 　　$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta$ 　　$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta$

$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$ 　　$\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$

$\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$ 　　$\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$



※暗記するのではなく，右の図を描いて導けるように練習しておこう。

コツ：θ はどんな値でも公式は成り立つ。θ を 20°～30°くらいにして図を描いて導出しよう。

●加法定理(絶対暗記)

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

●倍角公式

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

●半角公式

$\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

$\tan^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$

※倍角公式は加法定理から，半角公式は倍角公式と定義式 $(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1)$ からそれぞれ簡単に導ける。特に半角公式は使う頻度が低いので，覚えずに導けるように練習しておこう。

●積和公式

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$

$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

●和積公式

$\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$\sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

$\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$\cos A - \cos B = -2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

●三角関数の合成

$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

※ $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\tan\alpha = \dfrac{b}{a}$

積和・和積公式は加法定理から簡単に導けるので，暗記する必要はない。以下は(Ⅰ)，(Ⅱ)の導出例

(Ⅰ) $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

(Ⅱ) $\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

加法定理より，

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

この辺々を加えると，

$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta \cdots$(※)

よって，$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

(※)において，$A = \alpha+\beta$，$B = \alpha-\beta$ とおくと，

$\dfrac{A+B}{2} = \alpha$，$\dfrac{A-B}{2} = \beta$ となるので，

$\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

●導関数の記述法と定義式：$f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

※$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数といい，$y = f(x)$ のグラフ上の点 $(x, f(x))$ における接線の傾きを表す

●重要関数の導関数と基本的な微分法

$(x^n)' = nx^{n-1}$ 　$(\sin x)' = \cos x$ 　$(\cos x)' = -\sin x$ 　$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ 　$(\log_e x)' = \dfrac{1}{x}$

$\{\sin(ax+b)\}' = a\cos x$ 　$\{\cos(ax+b)\}' = -a\sin x$

●微分の性質

① $\{kf(x)\}' = kf'(x)$ 　② $\{f(x)+g(x)\}' = f'(x)+g'(x)$ 　③ $\{f(x)-g(x)\}' = f'(x)-g'(x)$

・積の微分法

④ $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

・合成関数の微分法

⑤ $\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g(x) \to \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$

●不定積分と定積分

$F'(x) = f(x)$ とするとき，$\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+C$

定積分：$\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$

※C を積分定数という

※$F(x)+C$ を原始関数または不定積分という

●重要関数の不定積分 　※C は積分定数とする

$\displaystyle\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1}+C\ (n \neq -1)$ 　$\displaystyle\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \log_e|x|+C$

$\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x+C$ 　$\displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x+C$ 　$\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x+C$

$\displaystyle\int \sin(ax+b)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$ 　$\displaystyle\int \cos(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$

●置換積分法

$\displaystyle\int f(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \int f(u)\,\mathrm{d}u$ 　$\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} f(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int_{u_1}^{u_2} f(u)\,\mathrm{d}u$

x	$x_1 \to x_2$
u	$u_1 \to u_2$

●対数の定義と性質

$y = a^x$ ($a > 0$ かつ $a \neq 1$) のとき，$x = \log_a y$ と定義されている。a に当たる数を底(てい)，y に当たる数を真数(しんすう)といい，$\log_a y$ は a を底とする y の対数という。指数関数や対数関数は実数のみを扱うため，真数 y や底 a は必然的に正となる。また，対数には次のような性質がある。

・$a^{\log_a M} = M$ 　・$\log_a a = 1$ 　・$\log_a 1 = 0$ 　・$\log_a M^p = p\log_a M$

・$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$ 　・$\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$ 　・$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

●自然対数の底

$\mathrm{e} = \lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$ をみたす e を自然対数の底またはネイピア数といい，$\mathrm{e} \fallingdotseq 2.71828\cdots$となることが知られている。この数には $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$ となる性質があり，一般に底が e である対数は，$\log M$ のように底を省略して記述される。

★**オイラーの公式**：$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$　(i は虚数単位)

●複素数と極形式

$$z = a + bi = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|e^{i\theta} \quad ※\arg z = \theta$$

$$※\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \tan\theta = \frac{b}{a}$$

●重要な近似式

$x \fallingdotseq 0$ ならば，　[Ⅰ] $(1 \pm x)^n \fallingdotseq 1 \pm nx$ (複号同順)　　[Ⅱ] $\sin x \fallingdotseq \tan x \fallingdotseq x$

[上式の導出]

$y = f(x)$の $x = 0$ における接線の方程式を $g(x)$ とする。$f(x)$ が $x = 0$ で微分可能で，$y = f(x)$ の $x = 0$ における接線の方程式を $y = g(x)$ とすると，

$g(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) = \boldsymbol{f(0) + f'(0)\,x}$

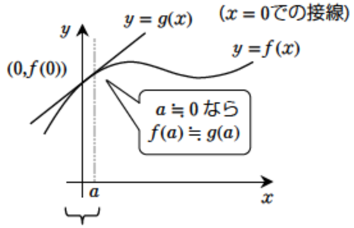
右図より，$x \fallingdotseq 0$ のとき，$y = f(x)$ は $y = g(x)$ に近似できるため，このような 1 次式 $g(x)$ を **1 次近似式**という。

① $f(x) = (1+x)^n$ なら，$g(x) = 1 + nx$

② $f(x) = (1-x)^n$ なら，$g(x) = 1 - nx$

③ $f(x) = \sin x$ なら，$g(x) = x$

④ $f(x) = \tan x$ なら，$g(x) = x$



※$x = 0$ 付近では $f(x)$ と $g(x)$ は
ほぼ同じ関数とみなせる！

①の証明

$f(x) = (1+x)^n$より，$f'(x) = \{(1+x)^n\}' = n(1+x)^{n-1}$

$f(0) = 1$，$f'(0) = n$ なので，$g(x) = f'(0)(x-0) + f(0) = \boldsymbol{nx + 1 = 1 + nx}$

②の証明

$f(x) = (1-x)^n$より，$f'(x) = \{(1-x)^n\}' = -n(1-x)^{n-1}$

$f(0) = 1$，$f'(0) = -n$　なので，$g(x) = f'(0)(x-0) + f(0) = \boldsymbol{-nx + 1 = 1 - nx}$

③の証明

$f(x) = \sin x$より，$f'(x) = \cos x$

$f(0) = 0$，$f'(0) = 1$　なので，$g(x) = f'(0)(x-0) + f(0) = 1x + 0 = \boldsymbol{x}$

④の証明

$f(x) = \tan x$ より，$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$f(0) = 0$，$f'(0) = 1$　なので，$g(x) = f'(0)(x-0) + f(0) = 1x + 0 = \boldsymbol{x}$

●内分点の位置ベクトル

2 点 A, B を $m : n$ に内分する点を P とすると

$$\overrightarrow{OP} = \frac{n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{m+n}$$

●外分点の位置ベクトル

2 点 A, B を $m : n$ に外分する点を Q とすると

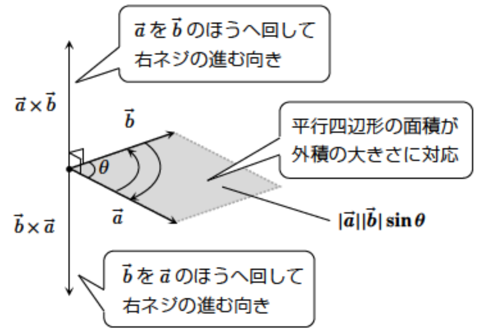
$$\overrightarrow{OQ} = \frac{-n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{m-n}$$

※$m : -n$ に内分する
と考えればよい！

●内積と外積

	内積	外積
表記	$\vec{a}\cdot\vec{b}$	$\vec{a}\times\vec{b}$
量の種類	スカラー量	ベクトル量
大きさ 成分	$\vec{a}\cdot\vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos\theta$ $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$	$\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert = \lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\sin\theta$ $\vec{a}\times\vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$
向き	なし	$\vec{a}$ を $\vec{b}$ の向きへ回して右ネジの進む向き

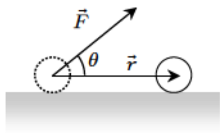
$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の成す角をθ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$とする。$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**内積**といい，大きさが $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$となる**スカラー量**として定義されている。それに対して $\boldsymbol{\vec{a}\times\vec{b}}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**外積**といい，大きさが $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ となる**ベクトル量**として定義されている。ベクトル $\vec{a}\times\vec{b}$ の向きは，$\vec{a}$ の向きを $\vec{b}$ の向きに回してネジが進む向き。ベクトル $\vec{a}\times\vec{b}$ とベクトル $\vec{b}\times\vec{a}$ は大きさが等しく互いに逆向きなので，$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$ が成り立つ。つまり，外積は交換法則が成り立たない。



・**力がする仕事**は**内積**で表すことができる

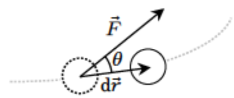
$\boldsymbol{\vec{a}\times\vec{b} \perp \vec{a}}$　$\boldsymbol{\vec{a}\times\vec{b} \perp \vec{b}}$
$\boldsymbol{\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}}$

$\vec{F}$ が一定で物体が直線運動する
場合の力 $\vec{F}$ がする仕事：$\boldsymbol{W = \vec{F}\cdot\vec{r}}$



$\boldsymbol{W = \vec{F}\cdot\vec{r} = |\vec{F}||\vec{r}|\cos\theta}$

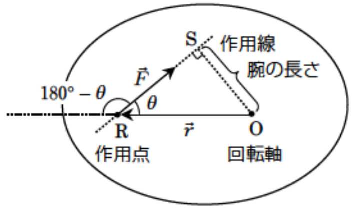
※物体が曲線状に動く場合



仕事 W は微小な仕事 dW を次々に足し合わせることで求められる。

$\boldsymbol{dW = \vec{F}\cdot d\vec{r}}$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{W = \int \vec{F}\cdot d\vec{r}}$

・**力のモーメント**は**外積**で定義されている



力のモーメント：$\boldsymbol{\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}}$

力のモーメントの大きさ：$\boldsymbol{|\vec{M}| = |\vec{r}||\vec{F}|\sin\theta}$

$\vec{r}$：回転軸を始点，力の作用点を終点とするベクトル

●運動エネルギーの導出と力学的エネルギー

速度 $\vec{v}=(v_x(t),v_y(t))$ で運動する質量 m の物体に外力 $\vec{F}$ が作用して，加速度 $\vec{a}=\left(\frac{d}{dt}v_x(t),\frac{d}{dt}v_y(t)\right)$ が生じたとき，運動方程式は次のように表される。

$$m\vec{a}=\vec{F}$$

この式と物体の速度 $\vec{v}$ との内積をとり，t_1 から t_2 まで時間積分すると，

$$\int_{t_1}^{t_2} m\vec{a}\cdot\vec{v}\ dt=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\cdot\vec{v}\ dt\cdots①$$

①の左辺

$$=\int_{t_1}^{t_2} m\left(\frac{d}{dt}v_x(t),\frac{d}{dt}v_y(t)\right)\cdot\left(v_x(t),v_y(t)\right)dt$$

$$=\int_{t_1}^{t_2} m\left(v_x(t)\frac{d}{dt}v_x(t)+v_y(t)\frac{d}{dt}v_y(t)\right)dt$$

$$=\int_{t_1}^{t_2} mv_x(t)\frac{d}{dt}v_x(t)dt+\int_{t_1}^{t_2} mv_y\cdot\frac{d}{dt}v_y(t)\,dt$$

ここで，置換積分法 $\int_{x_1}^{x_2} f(u)\frac{du}{dx}dx=\int_{u_1}^{u_2}f(u)du$

を利用すると，

①の左辺

$$=\int_{t_1}^{t_2} mv_x(t)\,dv_x+\int_{t_1}^{t_2} mv_y dv_y$$

$$=\left[\frac{1}{2}mv_x^2(t)\right]_{t_1}^{t_2}+\left[\frac{1}{2}mv_y^2(t)\right]_{t_1}^{t_2}$$

$$=\left[\frac{1}{2}m\{v_x^2(t)+v_y^2(t)\}\right]_{t_1}^{t_2}$$

$|\vec{v}|=\sqrt{v_x^2(t)+v_y^2(t)}$ であり，これを $v(t)$ とおくと，

①の左辺 $=\left[\frac{1}{2}mv^2(t)\right]_{t_1}^{t_2}=\frac{1}{2}mv^2(t_2)-\frac{1}{2}mv^2(t_1)$

時刻が $t_1\to t_2$ と変化するとき，物体の速さが $v_1\to v_2$ と変化したとすると，

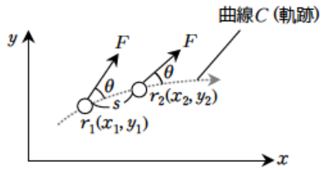
①の左辺 $=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2\cdots②$

また，力 $\vec{F}$ と速度 $\vec{v}$ との成す角をθ，$|\vec{F}|=F$，$|\vec{v}|=v$ とすると，内積の性質により，

$\vec{F}\cdot\vec{v}=|\vec{F}||\vec{v}|\cos\theta=Fv\cos\theta$ となるので，

①の右辺 $=\int_{t_1}^{t_2}Fv\cos\theta\ dt$

ここで，時刻が $t_1\to t_2$ と変化するとき，位置が $r_1(x_1,y_1)\to r_2(x_2,y_2)$ と変化し，距離 s だけ移動したとする。



このとき，$v=\frac{dr}{dt}$ となり，置換積分法により，

①の右辺 $=\int_{t_1}^{t_2}F\frac{dr}{dt}\cos\theta\,dt=\int_C F\cos\theta\,dr\cdots③$

これは物体の軌跡(曲線C)に沿った r_1 から r_2 までの積分を表し，この積分を**線積分**または**仕事積分**という。仮にFとθが一定であるとすると，

③ $=F\cos\theta\int_C dr=Fs\cos\theta$

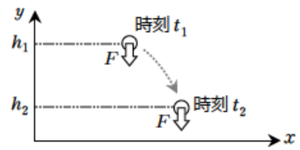
※ $\int_C dr=s$ （r_1からr_2までの曲線の長さを表す）

式の形からもわかるように，③は外力 $\vec{F}$ がする仕事を表している。従って，②，③より，次のことがいえる。

【外力がする仕事】
＝【後の運動エネルギー】−【初めの運動エネルギー】

速度 × 微小時間＝微小変位，
つまり，$\vec{v}\,dt=d\vec{r}$ と考えられるので，
①の右辺 $=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\cdot\vec{v}\ dt=\int_{r_1}^{r_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$
と変形することもできる。

ここで水平右向きを x 軸，鉛直上向きを y 軸として，質量 m の物体にはたらく力 $\vec{F}$ が重力だったとする。



重力は物体に対して常に鉛直下向きにはたらき，大きさはmgであるので，$\vec{F}=(0,-mg)$とすると，

$\vec{F}\cdot\vec{v}=(0,-mg)\cdot(v_x(t),v_y(t))$

$=-mgv_y(t)=-mg\frac{dy}{dt}$ であるので，

①の右辺

$$=-mg\int_{t_1}^{t_2}\frac{dy}{dt}dt=-mg[y(t)]_{t_1}^{t_2}$$

$$=-mg\big(y(t_2)-y(t_1)\big)=mgy(t_1)-mgy(t_2)$$

$y(t_1)$，$y(t_2)$ はそれぞれ時刻 t_1，t_2での物体の y 座標を表しており，$y(t_1)=h_1$，$y(t_2)=h_2$ とおくと，

①の右辺 $=mgh_1-mgh_2\cdots④$

上式は重力が物体にする仕事を表し，mgh_1 や mgh_2 は重力による位置エネルギーとして定義されている。

（この場合 x 軸の高さが重力による位置エネルギーの基準）また，**重力がする仕事は物体の経路によらず，物体の高さの差だけで決まることがわかる。**

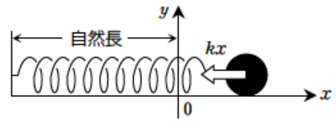
②と④が等しいので，

$\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2=mgh_1-mgh_2$　よって，

$\boldsymbol{\frac{1}{2}mv_1^2+mgh_1=\frac{1}{2}mv_2^2+mgh_2}$

つまり，**重力以外の力が物体に仕事をしなければ，物体の力学的エネルギーは保存されることになる。**

次に，ばね定数 k，振り子の質量 m の水平ばね振り子を想定し，自然長での振り子の位置を原点として水平右向きに x 軸，鉛直上向きに y 軸をとると，振り子にはたらく力は $\vec{F}=(-kx,\ 0)$ と表される。



※振り子にはたらく摩擦は小さく無視できるとする。
※弾性力は自然長に戻ろうとする向きにはたらくので，マイナスがつくことに注意する。

時刻が $t_1\to t_2$ と変化するとき，振り子の位置は $x_1\to x_2$ と変化するものとする。このとき，

$\vec{F}\cdot\vec{v}=(-kx,\ 0)\cdot(v_x(t),v_y(t))$

$=-kxv_x(t)=-kx\frac{dx}{dt}$ であるので，

同様に置換積分法によって，

①の右辺 $=\int_{t_1}^{t_2}-kx\frac{dx}{dt}dt=\int_{x_1}^{x_2}-kx\,dx$

$=\left[-\frac{1}{2}kx^2\right]_{x_1}^{x_2}=\frac{1}{2}kx_1^2-\frac{1}{2}kx_2^2\cdots⑤$

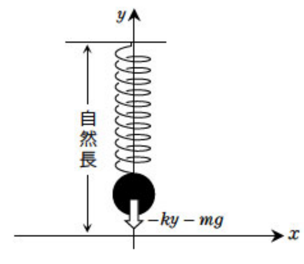
②と⑤が等しいので，

$\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2=\frac{1}{2}kx_1^2-\frac{1}{2}kx_2^2$　よって，

$\boldsymbol{\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}kx_1^2=\frac{1}{2}mv_2^2+\frac{1}{2}kx_2^2}$

よって，力学的エネルギーが保存されることになる。

さらに，ばね定数 k，振り子の質量 m の鉛直ばね振り子を想定し，自然長での振り子の位置を原点として水平右向きに x 軸，鉛直上向きに y 軸をとると，振り子にはたらく力は，$\vec{F}=(0,\ -ky-mg)$ と表すことができる。



※時刻が $t_1\to t_2$ と変化するとき，振り子の位置は $y_1\to y_2$ と変化するものとする。このとき，

$\vec{F}\cdot\vec{v}=(0,\ -ky-mg)\cdot(v_x(t),v_y(t))$

$=-kyv_y(t)-mgv_y(t)$

$=-ky\frac{dy}{dt}-mg\frac{dy}{dt}$ であるので，

同様に置換積分法によって，

①の右辺 $=\int_{t_1}^{t_2}\left(-ky\frac{dy}{dt}-mg\frac{dy}{dt}\right)dt$

$$=\int_{t_1}^{t_2}-ky\frac{dy}{dt}dt+\int_{t_1}^{t_2}-mg\frac{dy}{dt}dt$$

$$=\int_{y_1}^{y_2}-ky\,dy+\int_{y_1}^{y_2}-mg\,dy$$

$$=\left[-\frac{1}{2}ky^2\right]_{y_1}^{y_2}+[-mgy]_{y_1}^{y_2}$$

$$=\frac{1}{2}ky_1^2-\frac{1}{2}ky_2^2+mgy_1-mgy_2\cdots⑥$$

②と⑥が等しいので，

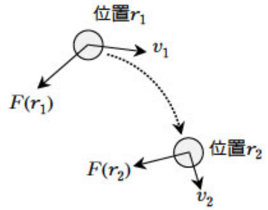
$\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2=\frac{1}{2}ky_1^2-\frac{1}{2}ky_2^2+mgy_1-mgy_2$

よって，

$\boldsymbol{\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}ky_1^2+mgy_1=\frac{1}{2}mv_2^2+\frac{1}{2}ky_2^2+mgy_2}$

つまり，力学的エネルギーは保存されることになる。

●保存力がする仕事と位置エネルギー



重力や万有引力，浮力，静電気力などは**保存力**と呼ばれ，保存力が物体にする仕事は，物体の経路によらず，物体の初めの位置と後の位置だけで決まるという性質がある。(このことを正確に理解するには大学で習う数学の知識が必要なため，性質だけ覚えておけばよい) 位置 r にある物体に保存力 $F(r)$ がはたらく場において，物体の位置が r_1から r_2 まで変化したとする。このとき，保存力がする仕事Wは次のように表すことができる。

$$\textbf{保存力がする仕事}：\boldsymbol{W} = \int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{r}$$

※$F(r)$ や $\mathrm{d}r$ は**ベクトル量**で矢印は省略してある。内積で表されている理由は前ページ参照。

※$F(r) = \left(m\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}, m\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\right)$，$\mathrm{d}r = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$，$r_0 = (x_0, y_0)$，$r_1 = (x_1, y_1)$，$r_2 = (x_2, y_2)$

一方，物体の位置エネルギーは次のように決められている。

位置エネルギーの考え方

保存力に逆らう力が物体を基準の位置(r_0)から各位置(r_1やr_2)へ運ぶまでにする仕事。
ただし，基準の位置と各位置での物体の運動エネルギーが変化しないように運ぶものとする。

(注) 例えば静止している物体を手で h(m)だけ高く持ち上げ，再び静止させる。このときの手がした仕事は運動エネルギーを増加させることなく，位置エネルギーだけを増加させたことになる。つまり手のした仕事が重力による位置エネルギーに相当する。

つまり，各位置での物体の位置エネルギーは次のように定義されている。

$$\textbf{位置 } \boldsymbol{r_1} \textbf{ での位置エネルギー}：\boldsymbol{U_1} = \int_{r_0}^{r_1} -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{r} \quad \textbf{位置 } \boldsymbol{r_2} \textbf{ での位置エネルギー}：\boldsymbol{U_2} = \int_{r_0}^{r_2} -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{r}$$

(注) 上式は保存力の符号を逆にして表しているので，保存力に逆らう力が物体を運ぶときの仕事も，やはり経路によらない。つまり位置エネルギーは物体の位置情報だけで決まることになる。

ここで，物体の位置が r_1 から r_2 まで移動したときの保存力がする仕事Wは $r_1 \to r_0 \to r_2$ という経路を辿ったとしても変わらないので，次のように書き換えることができる。

$$\boldsymbol{W} = \int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{r} = \int_{r_1}^{r_0} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{r} + \int_{r_0}^{r_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{r} = \int_{r_0}^{r_1} -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{r} - \int_{r_0}^{r_2} -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{U_1} - \boldsymbol{U_2}$$

この関係は次のような意味を持つ。

【保存力がする仕事】=【初めの位置エネルギー】−【後の位置エネルギー】…(a)

一方，前のページでは次の関係が成り立つことを導出した。

【外力がする仕事】=【後の運動エネルギー】−【初めの運動エネルギー】…(b)

ここで，物体が受ける外力が保存力のみであれば，**外力=保存力** であるので，(a)(b)より，

【初めの位置エネルギー】−【後の位置エネルギー】=【後の運動エネルギー】−【初めの運動エネルギー】 移項すると，

【初めの運動エネルギー】+【初めの位置エネルギー】=【後の運動エネルギー】+【後の位置エネルギー】

となり，これは力学的エネルギーが保存されることを表している。

一方，物体が受ける外力が非保存力と保存力があるとき，**外力=保存力+非保存力** であるので，(a)(b)より，

【保存力がする仕事】+【非保存力がする仕事】=【後の運動エネルギー】−【初めの運動エネルギー】 よって，

【非保存力がする仕事】=【後の運動エネルギー】−【初めの運動エネルギー】−【保存力がする仕事】
=【後の運動エネルギー】−【初めの運動エネルギー】−{【初めの位置エネルギー】−【後の位置エネルギー】}
=【後の運動エネルギー】+【後の位置エネルギー】−{【初めの運動エネルギー】+【初めの位置エネルギー】}
=【後の力学的エネルギー】−【初めの力学的エネルギー】

暗記

【保存力がする仕事】=【初めの位置エネルギー】−【後の位置エネルギー】
【非保存力がする仕事】=【後の力学的エネルギー】−【初めの力学的エネルギー】
※上記の関係式は単に運動方程式を変形したに過ぎないことを知っておこう！

●索　　引●

●ギリシャ文字

小文字	大文字	読み方	小文字	大文字	読み方	小文字	大文字	読み方
α	A	アルファ	ι	I	イオタ	ρ	P	ロー
β	B	ベータ	κ	K	カッパ	σ	Σ	シグマ
γ	Γ	ガンマ	λ	Λ	ラムダ	τ	T	タウ
δ	⊿	デルタ	μ	M	ミュー	υ	Y	ウプシロン
ε	E	イプシロン	ν	N	ニュー	ϕ	Φ	ファイ
ζ	Z	ゼータ	ξ	Ξ	グザイ	χ	X	カイ
η	H	イータ	o	O	オミクロン	ψ	Ψ	プサイ
θ	Θ	シータ	π	Π	パイ	ω	Ω	オメガ

●１０の整数乗倍を表す接頭語

倍数	名称	記号	倍数	名称	記号	倍数	名称	記号
10^{15}	ペタ	P	10^{2}	ヘクト	h	10^{-6}	マイクロ	μ
10^{12}	テラ	T	10	デカ	da	10^{-9}	ナノ	n
10^{9}	ギガ	G	10^{-1}	デシ	d	10^{-12}	ピコ	p
10^{6}	メガ	M	10^{-2}	センチ	c	10^{-15}	フェムト	f
10^{3}	キロ	k	10^{-3}	ミリ	m	10^{-18}	アト	a

●基本単位

物理量	名称	主な解説	記号	物理量	名称	記号	主な解説
長さ	メートル	―	m	電流	アンペア	A	基 p144, 下 p4
質量	キログラム	下 p223	kg	温度	ケルビン	K	基 p101, 上 p132
時間	秒	―	s	物質量	モル	mol	上 p133

●組立単位

物理量	名称	記号	基本単位による表現	主な解説
角度 θ	ラジアン	rad		上 p80
速さ v，速度 v	メートル毎秒	m/s	m/s	上 p20
加速度 a	メートル毎秒毎秒	m/s^2	m/s^2	上 p20
力 F	ニュートン	N	$kg{\cdot}m/s^2$	基 p38
圧力 P	パスカル	$Pa = N/m^2$	$kg/(m{\cdot}s^2)$	基 p64
力のモーメント M	ニュートンメートル	N·m	$kg{\cdot}m^2/s^2$	上 p43
力積 I，運動量 P	ニュートン秒	N·s	kg·m/s	上 p62, p63
仕事 W，エネルギー U 電力量 W，熱量 Q	ジュール	J = N·m	$kg{\cdot}m^2/s^2$	基 p78, p82 基 p145, p102
仕事率 P，電力 P	ワット	W = J/s	$kg{\cdot}m^2/s^3$	基 p81,p145
角速度 ω，角振動数 ω	ラジアン毎秒	rad/s		上 p80, p102 下 p128
振動数 f，周波数 f	ヘルツ	Hz	1/s	上 p102, p164 下 p128
モル比熱 C	ジュール毎モル 毎ケルビン	J/(mol·K)	$kg{\cdot}m^2/(s^2{\cdot}mol{\cdot}K)$	上 p152
電荷,電気量 Q	クーロン	C	A·s	基 p142，下 p79
電場の強さ E	ニュートン毎クーロン	N/C = V/m	$kg{\cdot}m/(A{\cdot}s^3)$	下 p14, p26
電位,電圧 V	ボルト	V = J/C = W/A	$kg{\cdot}m^2/(A{\cdot}s^3)$	下 p16, p17, p26
電気容量 C	ファラッド	F = C/V	$A^2{\cdot}s^4/(kg{\cdot}m^2)$	下 p52
誘電率 ε	ファラッド毎メートル	$F/m = C^2/(N{\cdot}m^2)$	$A^2{\cdot}s^4/(kg{\cdot}m^3)$	下 p30
電気抵抗 R	オーム	Ω = V/A	$kg{\cdot}m^2/(A^2{\cdot}s^3)$	下 p34, p48
抵抗率 ρ	オームメートル	Ω·m	$kg{\cdot}m^3/(A^2{\cdot}s^3)$	下 p34, p36, p48
磁気量 m，磁束 Φ	ウェーバ	Wb = V·s	$kg{\cdot}m^2/(A{\cdot}s^2)$	下 p79, 94
磁場の強さ H	ニュートン毎ウェーバ	N/Wb	A/m	基 p14 下 p79, p82
透磁率 μ	ニュートン毎アンペア 毎アンペア	$N/A^2 = Wb/(A{\cdot}m)$	$kg{\cdot}m/(A^2{\cdot}s^2)$	下 p79, p82
磁束密度 B	テスラ	$T = Wb/m^2$	$kg/(A{\cdot}s^2)$	下 p79, p80
インダクタンス L,M	ヘンリー	H = Wb/A	$kg{\cdot}m^2/(A^2{\cdot}s^2)$	下 p116, 120

●物理定数

物理量	定数	物理量	定数
標準重力加速度 g	$9.80665\ m/s^2 \fallingdotseq 9.8\ m/s^2$	万有引力定数 G	$6.67408 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$
真空中の光速 c	$2.99792458 \times 10^8\ m/s$	空気中の音速(0°C)	331.5 m/s
静電気力によるクーロンの法則の比例定数 k_0	$8.9876 \times 10^9\ N \cdot m^2/C^2$	磁気力によるクーロンの法則の比例定数 k_m	$6.3326 \times 10^4\ N \cdot m^2/Wb^2$
真空の誘電率 ε_0	$8.8542 \times 10^{-12}\ F/m$	真空の透磁率 μ_0	$1.2566 \times 10^{-6}\ N/A^2$
絶対零度	−273.15℃	気体定数 R	8.3144598 J/(mol・K)
アボガドロ定数 N_A	$6.02214076 \times 10^{23}/mol$	ボルツマン定数 k	$1.380649 \times 10^{-23}\ J/K$
標準大気圧（1 atm）	$1.01325 \times 10^5\ Pa$	理想気体の体積 (0℃, 1 atm)	$2.2413962 \times 10^{-2}\ m^3/mol$
電気素量 e	$1.602176634 \times 10^{-19}\ C$	電子の質量 m_e	$9.10938356 \times 10^{-31}\ kg$
電子の比電荷 e/m_e	$1.7588 \times 10^{11}\ C/kg$	統一原子質量単位（1 u）	$1.660539040 \times 10^{-27}\ kg$
陽子の質量 m_p	$1.672621898 \times 10^{-27}\ kg$	中性子の質量 m_n	$1.674927471 \times 10^{-27}\ kg$
プランク定数 h	$6.62607015 \times 10^{-34}\ J \cdot s$	リュードベリ定数 R	$1.0974 \times 10^7/m$
ボーア半径 a_0	$5.2918 \times 10^{-11}\ m$	熱の仕事当量 J	4.184 J/cal

●三角関数表

角	sin	cos	tan	角	sin	cos	tan	角	sin	cos	tan
1°	0.0175	0.9998	0.0175	31°	0.5150	0.8572	0.6009	61°	0.8746	0.4848	1.8040
2°	0.0349	0.9994	0.0349	32°	0.5299	0.8480	0.6249	62°	0.8829	0.4695	1.8807
3°	0.0523	0.9986	0.0524	33°	0.5446	0.8387	0.6494	63°	0.8910	0.4540	1.9626
4°	0.0698	0.9976	0.0699	34°	0.5592	0.8290	0.6745	64°	0.8988	0.4384	2.0503
5°	0.0872	0.9962	0.0875	35°	0.5736	0.8192	0.7002	65°	0.9063	0.4226	2.1445
6°	0.1045	0.9945	0.1051	36°	0.5878	0.8090	0.7265	66°	0.9135	0.4067	2.2460
7°	0.1219	0.9925	0.1228	37°	0.6018	0.7986	0.7536	67°	0.9205	0.3907	2.3559
8°	0.1392	0.9903	0.1405	38°	0.6157	0.7880	0.7813	68°	0.9272	0.3746	2.4751
9°	0.1564	0.9877	0.1584	39°	0.6293	0.7771	0.8098	69°	0.9336	0.3584	2.6051
10°	0.1736	0.9848	0.1763	40°	0.6428	0.7660	0.8391	70°	0.9397	0.3420	2.7475
11°	0.1908	0.9816	0.1944	41°	0.6561	0.7547	0.8693	71°	0.9455	0.3256	2.9042
12°	0.2079	0.9781	0.2126	42°	0.6691	0.7431	0.9004	72°	0.9511	0.3090	3.0777
13°	0.2250	0.9744	0.2309	43°	0.6820	0.7314	0.9325	73°	0.9563	0.2924	3.2709
14°	0.2419	0.9703	0.2493	44°	0.6947	0.7193	0.9657	74°	0.9613	0.2756	3.4874
15°	0.2588	0.9659	0.2679	45°	0.7071	0.7071	1.0000	75°	0.9659	0.2588	3.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	46°	0.7193	0.6947	1.0355	76°	0.9703	0.2419	4.0108
17°	0.2924	0.9563	0.3057	47°	0.7314	0.6820	1.0724	77°	0.9744	0.2250	4.3315
18°	0.3090	0.9511	0.3249	48°	0.7431	0.6691	1.1106	78°	0.9781	0.2079	4.7046
19°	0.3256	0.9455	0.3443	49°	0.7547	0.6561	1.1504	79°	0.9816	0.1908	5.1446
20°	0.3420	0.9397	0.3640	50°	0.7660	0.6428	1.1918	80°	0.9848	0.1736	5.6713
21°	0.3584	0.9336	0.3839	51°	0.7771	0.6293	1.2349	81°	0.9877	0.1564	6.3138
22°	0.3746	0.9272	0.4040	52°	0.7880	0.6157	1.2799	82°	0.9903	0.1392	7.1154
23°	0.3907	0.9205	0.4245	53°	0.7986	0.6018	1.3270	83°	0.9925	0.1219	8.1443
24°	0.4067	0.9135	0.4452	54°	0.8090	0.5878	1.3764	84°	0.9945	0.1045	9.5144
25°	0.4226	0.9063	0.4663	55°	0.8192	0.5736	1.4281	85°	0.9962	0.0872	11.4301
26°	0.4384	0.8988	0.4877	56°	0.8290	0.5592	1.4826	86°	0.9976	0.0698	14.3007
27°	0.4540	0.8910	0.5095	57°	0.8387	0.5446	1.5399	87°	0.9986	0.0523	19.0811
28°	0.4695	0.8829	0.5317	58°	0.8480	0.5299	1.6003	88°	0.9994	0.0349	28.6363
29°	0.4848	0.8746	0.5543	59°	0.8572	0.5150	1.6643	89°	0.9998	0.0175	57.2900
30°	0.5000	0.8660	0.5774	60°	0.8660	0.5000	1.7321	90°	1.0000	0.0000	–