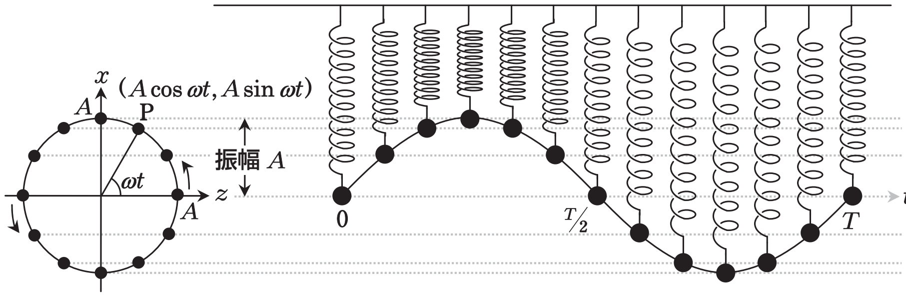
５章　単振動

●単振動とは　ばねにつながれた物体の運動や振れ幅の小さい糸振り子のような，行ったり来たりを繰り返す往復運動を**単振動**という。単振動は**等速円運動の正射影の運動**と同じである。



上図は縦軸を x，横軸を z とした座標系で，動点 P が等速円運動をしている様子を表している。動点 P は，原点を中心とした半径 A の円周上を角速度ωで運動し，点(A , 0)から t 秒後の点とすると，点 P の x 座標は $x = A\sin\omega t$ と表すことができる。この式が単振動の時間的な変位を表している。変位を時間微分すると速度が得られ，速度を時間微分すると加速度が得られるので，次の式が得られる。

変位：$x = A\sin\omega t$ …①　速度：$v = \dfrac{dx}{dt} = A\omega\cos\omega t$　加速度：$a = \dfrac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\sin\omega t$ …②

①,②より $A\sin\omega t$ を消去すると，$a = -\omega^2 x$　さらに単振動では，式中のωを**角振動数**，A を**振幅**という。また，この単振動の**周期** T s と**振動数** f Hz は，それぞれ点 P の等速円運動の周期，回転数と同じであるので，$T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{2\pi}{\omega}$ が成り立つ。

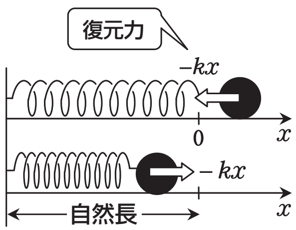
暗記
$$a = -\omega^2 x \qquad T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

●水平ばね振り子

右図のように，滑らかな水平面上で単振動をするばね振り子を考える。ばね定数を k，おもりの質量を m とする。さらに，ばねの端が自然長となる点を原点とし，水平右向きを正として x 軸をとる。単振動の加速度は $-\omega^2 x$ であるので，運動方程式を立てると，フックの法則より，$m(-\omega^2 x) = -kx$　両辺を $-x$ で割ると，

$m\omega^2 = k$　ωについて解くと $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

また周期を T とすると，$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$



暗記
$$周期：T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

注意！　図の $-kx$ のような，振動の中心に戻そうとする力を**復元力**という。この場合何故マイナス(−)がつくのか，しっかり理解しよう。水平右向きを正とすると，$x>0$ のとき，おもりはばねから左向きに力を受け，$x<0$ のとき，おもりは右向きに力を受ける。したがって，マイナスが必要である。

134　時刻 t s での変位が $x = A\sin(\omega t + \theta)$ m で表される物体がある。時刻 $t = 0$ で変位は $x = -A$ であるとき，次の問いに答えなさい。ただし A, ω, θ は定数で $A > 0,\ \omega > 0$ とする。

(1) この物体の運動を何というか。また，式中のωと A は何を表すか。
　運動：(　　　　　　　)　ω：(　　　　　　　)　A：(　　　　　　　)

(2) 定数θrad の値を求めなさい。ただし，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする。　θ = (　　　　　　　)

(3) 時刻 t での速度 v m/s を，(2)で求めたθの値を用いて答えなさい。
　v = (　　　　　　　)

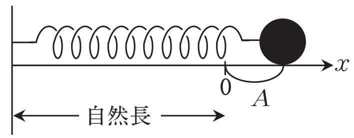
(4) 時刻 t での加速度 a m/s² を，(2)で求めたθの値を用いて答えなさい。
　a = (　　　　　　　)

(5) 速さの最大値を求めなさい。　(6) 加速度の大きさの最大値を求めなさい。
　(　　　　　　　) m/s　　(　　　　　　　) m/s²

(7) a を x とωだけの式で表しなさい。(8) 振動の周期 T s をωとπを用いて表しなさい。
　a = (　　　　　　　)　　T = (　　　　　　　)

(9) ωをこの物体の振動数 f Hz と円周率πを用いて表しなさい。　ω = (　　　　　　　)

135　図のように，滑らかな水平面上に，ばね定数 k N/m のばねの一端を固定し，他端に質量 m kg のおもりを取りつけ，滑らかな水平面上でおもりを自然長から A m だけ伸ばし，静かに放して振動させる。ばねの長さが自然長のときのおもりの位置を原点として，x 軸を水平右向きにとるとき，次の問いに答えなさい。



(1) おもりの加速度を，変位 x m と角振動数ω rad/s を用いて表しなさい。
　(　　　　　　　) m/s²

(2) 次の空欄を埋めて，おもりの運動方程式を完成させなさい。
　$m(-\boxed{}\,x) = -\boxed{}\,x$

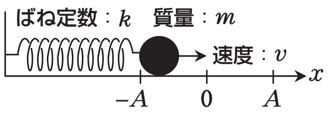
(3) 角振動数ωと周期 T をそれぞれ k, m, πを用いて表しなさい。
　ω = (　　　　　　　)　T = (　　　　　　　)

(4) 時刻 $t = 0$ で，引き延ばしたおもりを放したとして，おもりの時刻 t での変位 x を A, k, m, t を用いて表しなさい。(T とωは用いないこと)
　x = (　　　　　　　)

●水平ばね振り子のエネルギー保存則

滑らかな水平面上で運動するばね振り子では，ばねにつけられているおもりの**運動エネルギーとばねの弾性エネルギーの和は保存される。**そのことを導出してみよう。

右図のように振幅 A で単振動するおもりの運動エネルギーを K，ばねの弾性エネルギーを U すると，



$$K+U=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2\cdots①$$

ここで時刻 t におけるおもりの変位 x と速度 v は，次のように表すことができる。

$x=A\sin(\omega t+\theta)$，$v=A\omega\cos(\omega t+\theta)$　（ω は角振動数，θ は定数）

これを①式に代入すると，$K+U=\frac{1}{2}\underline{m}A^2\underline{\omega^2}\cos^2(\omega t+\theta)+\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\theta)$

一方，運動方程式 $m(-\omega^2 x)=-kx$ より $m\omega^2=k$ となり，下線部分を k に置き換えると，

$$K+U=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\theta)+\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\theta)$$

$$=\frac{1}{2}kA^2\{\cos^2(\omega t+\theta)+\sin^2(\omega t+\theta)\}\qquad\rightarrow\cos^2(\omega t+\theta)+\sin^2(\omega t+\theta)=1$$

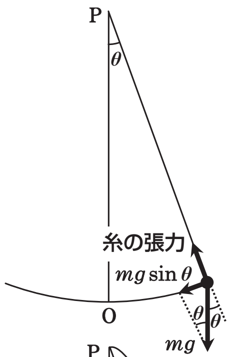
$=\frac{1}{2}kA^2=$ 一定　→k はばね定数，A は振幅であるので，$K+U$ は一定となる。

※ $\frac{1}{2}kA^2$ はばねの伸び縮みが最大のときのばねの弾性エネルギーを表している。

つまり，運動エネルギーが 0 で弾性エネルギーが最大のときのエネルギーを表している。

●単振子の周期

振れ幅の小さい糸振り子は単振動をする。単振動をする振り子のことを**単振子**という。振り子の支点を P，糸の長さを L，おもりの質量を m，重力加速度の大きさを g とし，さらに糸と鉛直線の成す角を θ とすると，おもりにはたらく重力の，円軌道の接線方向の大きさは $mg\sin\theta$ となる。θ が小さいとき，この接線方向の力の向きは水平方向と見なせる。つまり，この力は水平方向の**復元力**（振動の中心に戻そうとする力）と見なせる。



ここで，左下図のように，線分 OP からおもりまでの距離を x，角振動数を ω として，水平方向の単振動の運動方程式を立てると，

$m(-\omega^2 x)=-mg\sin\theta\cdots②$　（水平右向きを正とする）

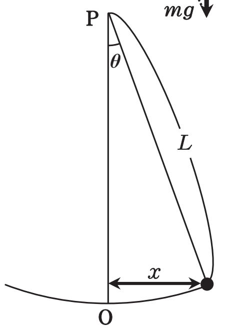
ここで，図形的に $\sin\theta=\frac{x}{L}$ であるので，これを②式に代入して，

$m(-\omega^2 x)=-\frac{mg}{L}x$　両辺を $-mx$ で割ると，

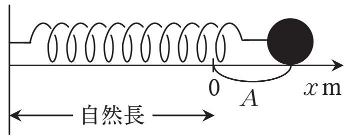
$\omega^2=\frac{g}{L}$ となるので，$\omega=\sqrt{\frac{g}{L}}$

よって，周期は $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

暗記
周期：$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$



136 図のように，滑らかな水平面上に，ばね定数 k N/m のばねの一端を固定し，他端に質量 m kg のおもりを取りつけ，滑らかな水平面上でおもりを自然長から A m だけ伸ばし，静かに放して振動をさせる。ばねの長さが自然長のときのおもりの位置を原点として，x 軸を水平右向きにとるとき，次の問いに答えなさい。



(1) 周期 T s と角振動数 ω rad/s をそれぞれ k, m, π を用いて表しなさい。

$T=($　　　　　$)$ s　$\omega=($　　　　　$)$ rad/s

(2) 時刻 $t=0$ で，引き伸ばしたおもりを放したとして，時刻 t s でのおもりの変位を $x=A\sin(\omega t+\theta)$ と表すとき，θ rad $\left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ の値を求めなさい。

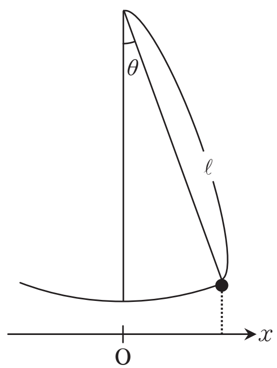
$\theta=($　　　　　$)$ rad

(3) (1)の x m と，おもりの速度 v m/s を A, k, m, t, π を用いて表しなさい。ただし，T, ω, θ は用いないこと。

$x=($　　　　　　　　$)$ m　$v=($　　　　　　　　$)$ m/s

(4) (3)の結果を利用して，$E=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2$ が一定となることを導きなさい。

137 質量 m kg のおもりを長さ ℓ m の糸の一端に取り付け，天井から吊るした。おもりを鉛直方向から右側へわずかに傾け，静かに放したところ，おもりは単振動をした。おもりが最下点にくる点を原点として，水平右向きに x 軸をとり，重力加速度の大きさを g m/s² として，次の問いに答えなさい。



(1) 糸が鉛直方向から右側へ θ rad だけ傾いているとき，次の①～③の問いに答えなさい。

① おもりが糸と垂直な方向に受ける力 F N を m, g, θ を用いて表しなさい。

② おもりの変位 x m を ℓ, θ で表しなさい。

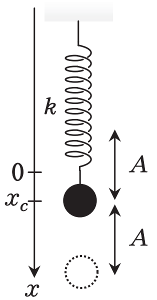
③ F を m, g, ℓ, x を用いて表しなさい。

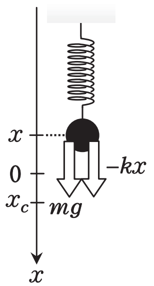
$F=($　　　　　$)$ N　$x=($　　　　　$)$ m　$F=($　　　　　$)$ N

(2) 水平方向の運動方程式を立てることによって，この単振動の周期 T s を g, ℓ, π を用いて表しなさい。

$T=($　　　　　$)$ s

●鉛直ばね振り子





$-kx$ は何故マイナスがつくかしっかり理解しよう。

鉛直方向に単振動するばね振り子を考える。左図のように，ばね定数 k のばねが**自然長になるときのばねの下端を原点**として，鉛直下向きに x 軸をとる。鉛直に吊るしたばねの下端に質量 m のおもりを静かにとりつける。ばねは自然長より x_c だけ伸びたとして，つり合いの式を立てると， $mg=kx_c$ より $x_c=\dfrac{mg}{k}$ …①

さらにおもりを A だけ引き下げ，静かに放すと，おもりはつり合いの位置($x=x_c$)を中心に振幅 A で単振動する。このことから時刻 t におけるおもりの変位 x，速度 v，加速度 a は，次のように表すことができる。

$x=x_c+A\sin(\omega t+\theta)$ …②　$v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A\omega\cos(\omega t+\theta)$ …③

$a=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-A\omega^2\sin(\omega t+\theta)$ …④　(ω：角振動数，θ：定数)

②,④より $A\sin(\omega t+\theta)$ を消去すると， $a=-\omega^2(x-x_c)$

よっておもりの運動方程式は次のように表すことができる。

$m\{-\omega^2(x-x_c)\}=-kx+mg$　**※下向きが正であることに注意**

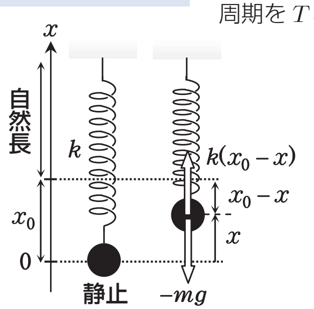
さらに①式より，x_c を消去して両辺を整理すると，

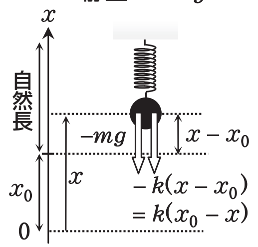
$-m\omega^2\left(x-\dfrac{mg}{k}\right)=-k\left(x-\dfrac{mg}{k}\right)$　両辺を $-\left(x-\dfrac{mg}{k}\right)$ で割ると

$m\omega^2=k$　よって，$\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

周期を T とすると，　$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

> 暗記
> **周期：$T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$**





※自然長より短い場合でも式は変わらないことを理解しよう！

軸のとり方で式が変わるので注意しよう。左図のように，ばねは自然長から x_0 伸びて，おもりが静止してつり合っていたとする。この**つり合いの位置を原点**とし て，鉛直上向きに x 軸をとると，つり合いの式は，

$mg=kx_0$ …①′

さらに，振幅 A でおもりを単振動させると，

変位：$x=A\sin(\omega t+\theta)$ …②′

速度：$v=A\omega\cos(\omega t+\theta)$ …③′

加速度：$a=-A\omega^2\sin(\omega t+\theta)$ …④′

②′，④′より，$A\sin(\omega t+\theta)$ を消去すると，

$a=-\omega^2x$ となるので，運動方程式は

$m(-\omega^2x)=k(x_0-x)-mg$　**→左図を参照**

①′より，mg を消去して整理すると　$m(-\omega^2x)=-kx$

よって，$m\omega^2=k$　これを ω について解くと，

$\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ となり，周期 T は，

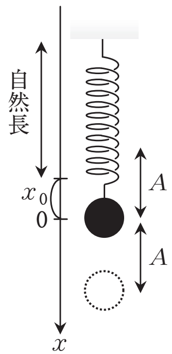
$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

> 暗記
> **振動の中心を原点にすると，加速度は $a=-\omega^2x$**

●復元力と弾性力の違い

復元力は「振動の中心方向にはたらく力」であり，**弾性力は「伸び縮みする物体が自然長に戻ろうとする向きにはたらく力」**である。摩擦が無視できる水平ばね振り子の場合，自然長での振り子の位置と振動の中心が一致するため，復元力は弾性力と一致する。一方鉛直ばね振り子の場合，振動の中心は自然長での振り子の位置より下側に来るため，復元力は弾性力と一致せず，振り子にはたらく重力と弾性力の合力に一致する。

138 ばね定数 k N/m のばねを天井に吊るし，下端に質量 m kg の物体を静かに吊るすと，ばねは自然長から x_0 m ($x_0>0$) だけ伸びた。重力加速度の大きさを g m/s² とし，物体が静止している位置を原点として，鉛直下向きに x 軸をとるとき，次の問いに答えなさい。



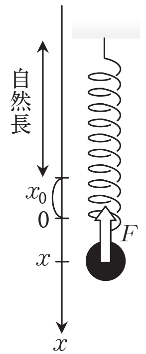
(1) x_0 を m と k を用いて表しなさい。$x_0=$ (　　　　　　)

物体を原点から A m ($A>0$) 引き伸ばして静かに放すと，物体は単振動した。

(2) 時刻 $t=0$ でのおもりの変位は $x=0$ で，このときの物体は鉛直下向きに移動している。角振動数を ω rad/s ($\omega>0$) とするとき，時刻 t s での物体の変位 x m，速度 v m/s(鉛直下向きを正)，加速度 a m/s² を求めなさい。

$x=$ (　　　　　　)　$v=$ (　　　　　　)

$a=$ (　　　　　　)



(3) (2)の結果より，加速度 a を ω, x で表しなさい。$a=$ (　　　　　　)

(4) おもりの変位が x のときのおもりがばねから受ける力 F N を x_0 と x を用いて表しなさい。ただし F は鉛直下向きを正とする。

$F=$ (　　　　　　)

(5) 運動方程式を立てることによって，ω を k, m の式で表しなさい。

$\omega=$ (　　　　　　)

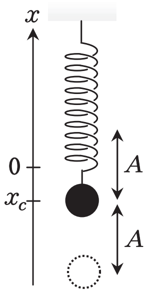
(6) (1),(5)の結果より，この振動の周期 T s を π, m, k を用いて表しなさい。

$T=$ (　　　　　　)

●鉛直ばね振り子のエネルギー保存則

鉛直に運動するばね振り子では，**力学的エネルギー（おもりの運動エネルギーとばねの弾性エネルギーとおもりの重力による位置エネルギーの和）は保存される。**そのことを導出してみよう。

右図のように，自然長のばねの下端を原点として，鉛直上向きに x 軸をとる。ばね定数を k，おもりの質量を m，重力加速度の大きさを g，おもりが静止してつり合っているときのおもりの変位を $x = x_c\ (x_c < 0)$ とする。



つり合いの式は　$mg = -kx_c$ …①′　　よって，$x_c = -\dfrac{mg}{k}$ …①

おもりが振幅 A で単振動しているとき，時刻 $t=0$ でおもりの変位が $x = x_c$ であるとすると，時刻 t でのおもりの変位 x，速度 v，加速度 a は角振動数 ω を用いて次のように表すことができる。

$x = x_c + A\sin\omega t$ …②　　$v = A\omega\cos\omega t$ …③　　$a = -A\omega^2\sin\omega t$ …④

②,④より $A\sin\omega t$ を消去すると $a = -\omega^2(x - x_c)$ となり，おもりの運動方程式は $m\{-\omega^2(x - x_c)\} = -kx - mg$　と表される。

さらに①式より，x_c を消去して両辺を整理すると，

$-m\omega^2\left(x + \dfrac{mg}{k}\right) = -k\left(x + \dfrac{mg}{k}\right)$　　両辺を $-\left(x + \dfrac{mg}{k}\right)$ で割ると，$m\omega^2 = k$ …⑤

おもりの運動エネルギーとばねの弾性エネルギーとおもりの重力による位置エネルギーの和を E とし，重力による位置エネルギーの基準を原点にすると，

$E = \dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}kx^2 + mgx$ …⑥　となる。②,③より x,v を消去すると，

$$E = \frac{1}{2}\underline{mA^2\omega^2}\cos^2\omega t + \frac{1}{2}k(x_c + A\sin\omega t)^2 + \underline{mg}(x_c + A\sin\omega t)$$

⑤式の $k = m\omega^2$　①′式の $mg = -kx_c$　より，上式の下線部を置き換えると，

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t + \frac{1}{2}k(x_c + A\sin\omega t)^2 - kx_c(x_c + A\sin\omega t)\\ &= \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t + \frac{1}{2}k(x_c{}^2 + 2x_cA\sin\omega t + A^2\sin^2\omega t) - kx_c(x_c + A\sin\omega t)\\ &= \frac{1}{2}kA^2(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t) + \frac{1}{2}kx_c{}^2 + kx_cA\sin\omega t - kx_c{}^2 - kx_cA\sin\omega t\\ &= \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx_c{}^2 = \text{一定} \cdots ⑦\end{aligned}$$

(k, A, x_c は定数であるため一定となる)

よって，**力学的エネルギーは保存される。**

また，⑥,⑦より，$\dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}kx^2 + mgx = \dfrac{1}{2}kA^2 - \dfrac{1}{2}kx_c{}^2$　が成り立つ。

この式をさらに変形してみる。

$\dfrac{1}{2}kx_c{}^2$ を左辺に移項すると，

$\dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}kx^2 + mgx + \dfrac{1}{2}kx_c{}^2 = \dfrac{1}{2}kA^2$

①′の $mg = -kx_c$ より mg を $-kx_c$ に置き換えて，

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 - kx_cx + \frac{1}{2}kx_c{}^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(x^2 - 2x_cx + x_c{}^2) = \frac{1}{2}kA^2$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(x - x_c)^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

暗記

●水平方向のばね振り子のエネルギー保存則

$\dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}kx^2 = $ **一定**

x：**振動の中心からの変位**

＝自然長の位置からの変位

●鉛直方向のばね振り子のエネルギー保存則

$\dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}kX^2 = $ **一定**

X：**振動の中心からの変位**

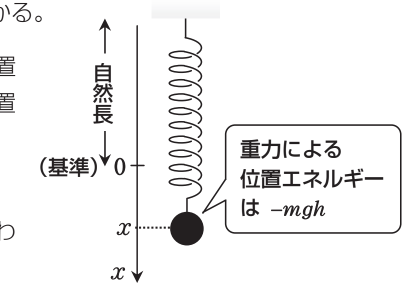
≠自然長の位置からの変位

※ $x - x_c$ は**振動の中心からの変位**を表しているので，この式は水平方向のばね振子のエネルギー保存則の式と対応していることがわかる。

注意！ 鉛直下向きを正として，重力による位置エネルギーの基準をばねの自然長の位置（原点）とすると，

力学的エネルギー $= \dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}kx^2 - mgx$

軸の向きで重力による位置エネルギーの式が変わってくるので注意しよう。



139 質量 m kg の物体をばね定数 k N/m のばねにつなぎ，天井に吊るした。重力加速度の大きさを g m/s² として，次の問いに答えなさい。

(1) 物体が静止して，物体にはたらく力がつり合っているとき，ばねの自然長からの伸びを求めなさい。　(　　　　　　) m

物体が静止している状態から，さらにばねを A m 伸ばして静かに放すと，物体は単振動した。

(2) つり合いの位置を通過するときの，物体の速さを求めなさい。(　　　　　　) m/s

(3) ばねが自然長になるときの，物体の速さを求めなさい。　(　　　　　　) m/s