1 $\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

$\tan\theta = \dfrac{b}{a}$

【解説】

三平方の定理より, $a^2+b^2=\mathrm{AB}^2$ であるので,

$\mathrm{AB}=\sqrt{a^2+b^2}$　よって,

$\cos\theta = \dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\sin\theta = \dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\tan\theta = \dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} = \dfrac{b}{a}$

2 (1) $\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$, $\sin 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

$\cos 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(2) $\cos^2 30^\circ + \sin^2 30^\circ = 1$,

$\cos^2 60^\circ + \sin^2 60^\circ = 1$

$\cos^2 45^\circ + \sin^2 45^\circ = 1$

(3) $\tan 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$,

$\tan 45^\circ = 1$

(4) $\dfrac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\dfrac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \sqrt{3}$,

$\dfrac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} = 1$

【解説】

(2) $\cos^2 30^\circ + \sin^2 30^\circ = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

$= \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} = 1$

$\cos^2 60^\circ + \sin^2 60^\circ = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$= \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} = 1$

$\cos^2 45^\circ + \sin^2 45^\circ = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$

(4) $\dfrac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}\times 2}{\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\dfrac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2}{\frac{1}{2}\times 2} = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

$\dfrac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt{2}} = 1$

3 (1) AB: $5\cos\theta$,BC: $5\sin\theta$

(2) $\mathrm{AB}=1.71$, $\mathrm{BC}=4.70$

【解説】

(1) AB = 斜辺 $\times\cos\theta = 5\cos\theta$,

BC = 斜辺 $\times\sin\theta = 5\sin\theta$

(2) 三角関数表より,

$\cos 70^\circ = 0.3420$, $\sin 70^\circ = 0.9397$ であるので $\mathrm{AB} = 5\cos 70^\circ = 5\times 0.3420 = 1.71$

$\mathrm{BC} = 5\sin 70^\circ = 5\times 0.9397 = 4.6985 \fallingdotseq 4.70$

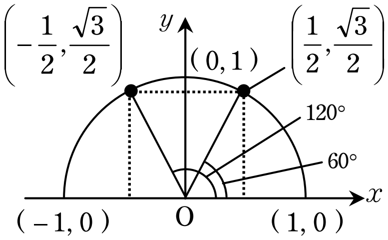
4

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	−1

θ	150°	180°
$\cos\theta$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

【解説】原点を中心とする半径1の円周上の x 座標が $\cos\theta$, y 座標が $\sin\theta$ であるので,図のように θ のそれぞれの値における円周上の座標を求めて $\cos\theta$, $\sin\theta$ の値を求める。

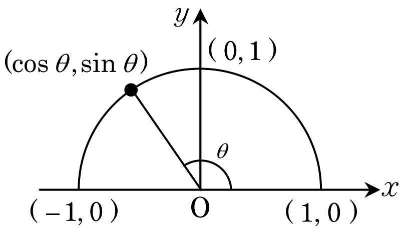
また, $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ であるので $\tan\theta$ は $\dfrac{y\text{座標}}{x\text{座標}}$ と考えて求めればよい。



5 $-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$, $0 \leqq \sin\theta \leqq 1$

【解説】

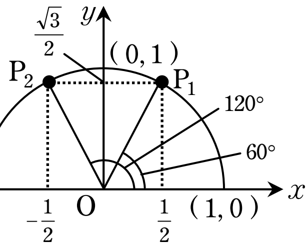
$0 \leqq \theta \leqq 180°$ のとき, 図のように半円の弧上の x 座標, y 座標のとり得る範囲は,
$-1 \leqq x$座標$\leqq 1$, $0 \leqq y$座標$\leqq 1$　よって,
$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$, $0 \leqq \sin\theta \leqq 1$



6 $\theta = 60°, 120°$

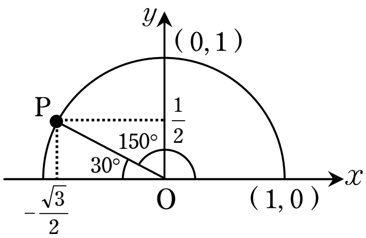
【解説】

図のように $0° \leqq \theta \leqq 180°$ では, y 座標が $\frac{\sqrt{3}}{2}$ となる点は P_1, P_2 の 2 カ所であるので, $\theta = 60°, 120°$



7 $\theta = 150°$

【解説】

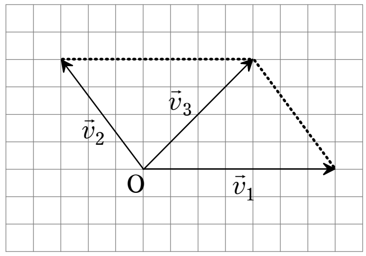


図のように $0° \leqq \theta \leqq 180°$ では, x 標が $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ となる点は P の 1 所であるので, $\theta = 150°$

8 (1) $|\vec{v}_1| = 7$　$|\vec{v}_2| = 5$　(2) 下図参照

(3) $|\vec{v}_3| = 4\sqrt{2}$

【解説】



$|\vec{v}_2| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$|\vec{v}_3| = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$

9 (1) $\vec{a} = -2\vec{b}$　(2) $\vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{a}$, $\vec{c} = \frac{3}{2}\vec{a}$

(3) $\vec{a} = \frac{2}{3}\vec{c}$, $\vec{b} = -\frac{1}{3}\vec{c}$

【解説】

(2) $|\vec{a}| : |\vec{c}| = 4 : 6$ より, $4|\vec{c}| = 6|\vec{a}|$

よって, $|\vec{c}| = \frac{3}{2}|\vec{a}|$ また, $\vec{a}$ と $\vec{c}$ は同じ向きであることに注目する。

(3) $\vec{c} = \frac{3}{2}\vec{a}$ より, $\vec{a} = \frac{2}{3}\vec{c}$

$\vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{a} = -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\vec{c}\right) = -\frac{1}{3}\vec{c}$

10 (1) $-2\vec{a}$　(2) $\vec{0}$　(3) $9\vec{a} + 3\vec{b}$

【解説】

分配法則も成り立ち, 文字計算と同じように計算できる。

11 (1) ア. $\overrightarrow{RQ}$　イ. $\overrightarrow{RP}$　ウ. $\overrightarrow{PR}$　エ. $\overrightarrow{PQ}$

オ. $\overrightarrow{RP}$　カ. $\overrightarrow{QR}$

(2) ① 8　② 10　③ 0

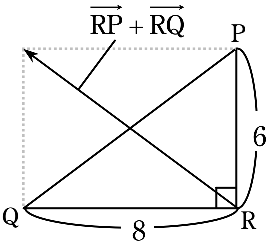
【解説】

(1) ア～オ: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ が成り立つことを利用する。カ: $\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QR}$

(2) ① $\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{RQ}$ より,

$|\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PR}| = |\overrightarrow{RQ}| = 8$

② $\overrightarrow{RP}+\overrightarrow{RQ}$ の大きさは，図より斜辺 PQ の長さと等しい。



よって，

$|\overrightarrow{RP}+\overrightarrow{RQ}|=PQ=\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{100}=10$

③ $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RP}=\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{RP}=\overrightarrow{PR}-\overrightarrow{PR}=\vec{0}$

よって，$|\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RP}|=0$

12 (1) $\vec{a}+\vec{b}$　(2) $\vec{b}-\vec{a}$　(3) $-2\vec{a}$

(4) $\vec{a}+2\vec{b}$

【解説】

(1) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}=\vec{a}+\vec{b}$

(2) $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$

(3) $\overrightarrow{CF}=-2\overrightarrow{BA}=-2\vec{a}$

(4) $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AF}=\vec{a}+2\vec{b}$

13 (1) $\overrightarrow{PB},\overrightarrow{RQ}$　(2) $\overrightarrow{RC},\overrightarrow{PQ}$

(3) ① $-\vec{a}-\vec{b}$　② $2\vec{b}-2\vec{a}$　③ $\vec{b}-2\vec{a}$

④ $\vec{0}$

【解説】

(1),(2) 中点連結定理より，AB // RQ, AB = 2RQ, AC // PQ, AC = 2PQ であることを利用する。

(3),(1)より，$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{RQ}=\vec{a}$，

$\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{RC}=\overrightarrow{PQ}=\vec{b}$ であることを利用する。

① $\overrightarrow{QA}=\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RA}=-\vec{a}-\vec{b}$

② $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=2\vec{b}-2\vec{a}$

③ $\overrightarrow{BR}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}-2\vec{a}$

④ $\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AP}=\vec{b}-\vec{a}$，

$\overrightarrow{CR}=\overrightarrow{RA}=-\vec{b}$ より，

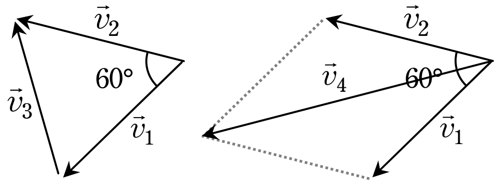
$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{CR}=\vec{a}+(\vec{b}-\vec{a})-\vec{b}=\vec{0}$

14 (1) $|\vec{v}_x|=|\vec{v}|\cos\theta$, $|\vec{v}_y|=|\vec{v}|\sin\theta$

(2) $\tan\theta=\dfrac{|\vec{v}_y|}{|\vec{v}_x|}$　(3) $\vec{v}=\vec{v}_x+\vec{v}_y$

(4) $\overrightarrow{AC}=\vec{v}_x-\vec{v}_y$

15 (1) (2) 下図参照 (3) 10 (4) $10\sqrt{3}$



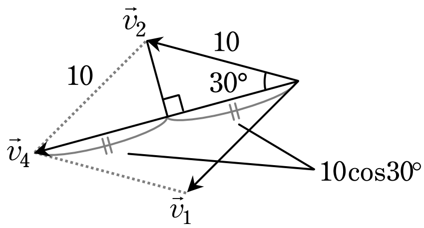
【解説】

(3) 正三角形の 3 辺はすべて等しいので，$\vec{v}_1$，$\vec{v}_2$，$\vec{v}_3$ の大きさはすべて等しい。

よって，$|\vec{v}_1|=|\vec{v}_2|=|\vec{v}_3|=10$

(4) 図より，

$|\vec{v}_4|=2\times10\cos30^\circ=2\times10\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$



16 (1) 3　(2) 0　(3) 3

【解説】

(1) $|5-2|=|3|=3$　(2) $|2-2|=|0|=0$

(3) $|-1-2|=|-3|=3$

17 (1) 1　(2) $\dfrac{1}{5}$　(3) $\dfrac{1}{32}$　(4) $-\dfrac{1}{125}$

【解説】

(1) a がどのような数であれ，$a^0=1$

(2) $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ であることを利用する。

(3) $2^{-5}=\dfrac{1}{2^5}=\dfrac{1}{32}$

(4) $(-5)^{-3}=\dfrac{1}{(-5)^3}=-\dfrac{1}{125}$

18 (1) a^3　(2) ab^{-2}　(3) $\dfrac{1}{10}$　(4) 27

【解説】

(1) $a^4\times a^{-3}\div(a^2)^{-1}=a^4\times a^{-3}\div a^{-2}$

$=a^{4+(-3)-(-2)}=a^3$

(2) $(a^2\times b^{-3})^2\div a^3b^{-4}=a^{2\times2}\times b^{-3\times2}\div a^3b^{-4}$

$$= a^4b^{-6} \div a^3b^{-4} = a^{4-3}b^{-6-(-4)} = ab^{-2}$$

(3) $10^2 \times 10^{-3} = 10^{2+(-3)} = 10^{-1} = \dfrac{1}{10}$

(4) $3^2 \times 3^{-3} \div 3^{-4} = 3^{2+(-3)-(-4)} = 3^3 = 27$

19 (1) 10 (2) 1 (3) 4 (4) -2 (5) $-\infty$
(6) ∞ (7) 1 (8) ∞ (9) 0 (10) 0

【解説】

(1) $f(-2) = -3 \times (-2) + 4 = 10$

(2) $g(2) = \dfrac{1}{|2-3|} = \dfrac{1}{|-1|} = 1$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(-3x+4) = -3\times 0 + 4 = 4$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 2}(-3x+4) = -3\times 2 + 4 = -2$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}(-3x+4) = -3\times \infty + 4 = -\infty$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}(-3x+4) = -3\times (-\infty) + 4 = \infty$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{1}{|x-3|} = \frac{1}{|4-3|} = 1$

(8) 分母が正のまま0に近づくと，正の無限大に発散するので，$\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{1}{|x-3|} = \infty$

(9),(10)分母の絶対値が無限に大きくなると0に近づく。よって，$\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{|x-3|} = 0$，

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{|x-3|} = 0$$

20 (1) $y' = 4x^3$ (2) $y' = -2$ (3) $y' = 0$
(4) $y' = x$ (5) $y' = 3$ (6) $y' = 4x+1$

21 5

【解説】

導関数は $y' = 2x-1$ となり，これに $x=3$ を代入して $y' = 2\times 3 - 1 = 5$

22 4

【解説】

導関数は $y' = \dfrac{4}{3}x - 4$ となり，これに $x=6$ を代入して $y' = \dfrac{4}{3}\times 6 - 4 = 4$

23 (1) $v = 2at + b$ (2) $v = a + bt$

24 (1) $Y = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + C$

(2) $Y = \dfrac{2}{3}x^3 + C$ (3) $Y = -\dfrac{1}{2}x^2 + C$

(4) $Y = 5x + C$ (5) $Y = 2x^2 + 7x + C$

(6) $Y = \dfrac{1}{6}x^2 + \dfrac{1}{2}x + C$

25 (1) $S_1 = 1,\ S_2 = 4,\ S_3 = 9$

(2) $Y = x^2$

(3)

x	0	1	2	3
Y	0	1	4	9

【解説】

(2) 原始関数は $Y = x^2 + C$ となり，$x=0$ のとき $Y=0$ であることから積分定数は $C=0$ とならなければいけない。よって，$Y = x^2$

26 (1) $Y = \dfrac{1}{4}x^2 + 3x$ (2) $Y' = \dfrac{1}{2}x + 3$

(3) $S = \dfrac{45}{4}$

【解説】

(3) $S = \dfrac{1}{4}x^2 + 3x$ において，$x=3$ を代入して，

$$S_3 = \frac{1}{4}\times 3^2 + 3\times 3 = \frac{45}{4}$$

27 (1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{2}x - 1$ (2) $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{1}{2}$

【解説】

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \left(\dfrac{1}{4}x^2 - x - 3\right)' = \dfrac{2}{4}x^{2-1} - 1x^{1-1}$

$$= \frac{1}{2}x - 1$$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \left(\dfrac{1}{2}x - 1\right)' = \dfrac{1}{2}x^{1-1} = \dfrac{1}{2}$

28 $f'(-1) = -7$

【解説】

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2}\right)' = (x^{-3} - 2x^{-2})'$$

$$= -3x^{-3-1} - 2\times(-2)x^{-2-1}$$

$$= -3x^{-4} + 4x^{-3} = -\frac{3}{x^4} + \frac{4}{x^3}$$ よって，

$$f'(-1)=-\frac{3}{(-1)^4}+\frac{4}{(-1)^3}=-3-4=-7$$

29 (1) $\frac{5}{2}x^2+C$　(2) $3x+C$

(3) $\frac{1}{6}x^3+5x+C$

(4) $\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+2x+C$

(5) $\frac{1}{3x^3}+C$　(6) $x^3+\frac{2}{x}+C$

【解説】

(1) $\int 5x\,\mathrm{d}x=\frac{5}{1+1}x^{1+1}+C=\frac{5}{2}x^2+C$

(2) $\int 3\,dx=\int 3x^0\,\mathrm{d}x=\frac{3}{0+1}x^{0+1}+C$

$=3x+C$

(3) $\int\left(\frac{1}{2}x^2+5\right)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2+1}x^{2+1}+5x^{0+1}+C$

$=\frac{1}{6}x^3+5x+C$

(4) $\int(4x^2+3x+2)\mathrm{d}x$

$=\frac{4}{2+1}x^{2+1}+\frac{3}{1+1}x^{1+1}+2x^{0+1}+C$

$=\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+2x+C$

(5) $\int-\frac{1}{x^4}\,dx=\int -x^{-4}\,dx$

$=-\frac{1}{-4+1}x^{-4+1}+C$

$=\frac{1}{3}x^{-3}+C=\frac{1}{3x^3}+C$

(6) $\int\left(3x^2-\frac{2}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\int(3x^2-2x^{-2})\mathrm{d}x$

$=\frac{3}{2+1}x^{2+1}-\frac{2}{-2+1}x^{-2+1}+C$

$=x^3+2x^{-1}+C=x^3+\frac{2}{x}+C$

30 (1) 5　(2) 36　(3) $\frac{21}{2}$　(4) $\frac{2}{3}$

【解説】

(1) $\int_1^2(3x^2-2x+1)\,dx=[x^3-x^2+x]_1^2$

$=(2^3-2^2+2)-(1^3-1^2+1)=5$

(2) $\int_1^4(x^2+2x)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_1^4$

$=\left(\frac{1}{3}\cdot4^3+4^2\right)-\left(\frac{1}{3}\cdot1^3+1^2\right)=\frac{63}{3}+15=36$

(3) $\int_{-2}^1(-x+3)\,\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{2}x^2+3x\right]_{-2}^1$

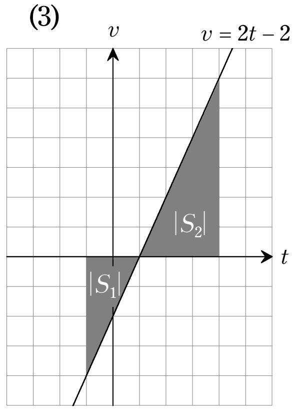
$=\left(-\frac{1}{2}+3\right)-\left(-\frac{4}{2}-6\right)=\frac{3}{2}+9=\frac{21}{2}$

(4) $\int_{-3}^{-1}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-3}^{-1}x^{-2}\,\mathrm{d}x=[-x^{-1}]_{-3}^{-1}$

$=\left[-\frac{1}{x}\right]_{-3}^{-1}=1-\left(-\frac{1}{-3}\right)=\frac{2}{3}$

31 (1) -4　(2) 9

(3)



(4) $\int_{-1}^4(2t-2)\mathrm{d}t$

$=[t^2-2t]_{-1}^3$

$=(16-6)-(1+2)$

$=5\cdots$①

(1) ,(2) より,

S_1+S_2

$=-4+9=5\cdots$②

①,②より,

$\int_{-1}^4(2t-2)\mathrm{d}t=S_1+S_2$

【解説】

(1) $S_1=\int_{-1}^1(2t-2)\,\mathrm{d}t=[t^2-2t]_{-1}^1$

$=(1-2)-(1+2)=-4$

(2) $S_2=\int_1^4(2t-2)\,\mathrm{d}t=[t^2-2t]_1^4$

$=(16-8)-(1-2)=9$

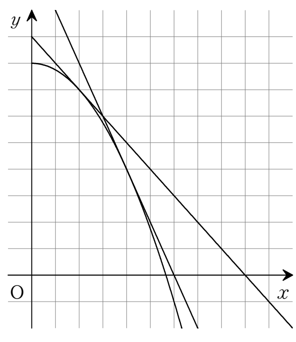
32 (1) -1

(2) -2

(3) 右図

(4) $4\sqrt{2}$

(5) $\frac{64}{3}\sqrt{2}$



【解説】

(1) ,(2) 導関数は,

$y' = -\frac{1}{4} \times 2x^{2-1} = -\frac{1}{2}x$ よって, $x = 2$, $x = 4$ での接線の傾きをそれぞれ m_2, m_4 とすると,

$m_2 = -\frac{1}{2} \times 2 = -1$ $m_4 = -\frac{1}{2} \times 4 = -2$

(4) x 軸上の y 座標は 0 であるので,

$y = -\frac{1}{4}x^2 + 8$ に $y = 0$ を代入すると,

$0 = -\frac{1}{4}x^2 + 8$ これを x について解くと,

$x = \pm 4\sqrt{2}$ $x \geqq 0$ より, x 軸との交点の x 座標は $4\sqrt{2}$

(5) $\int_0^{4\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{4}x^2 + 8 \right) \mathrm{d}x$

$= \left[-\frac{1}{12}x^3 + 8x \right]_0^{4\sqrt{2}}$

$= -\frac{1}{12}(4\sqrt{2})^3 + 8 \times 4\sqrt{2}$

$= -\frac{32\sqrt{2}}{3} + 32\sqrt{2}$

$= \frac{-32\sqrt{2} + 96\sqrt{2}}{3} = \frac{64}{3}\sqrt{2}$

33 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{3}$

【解説】

$\sqrt{a} = a^x$ の両辺を 2 乗すると, $a = a^{2x}$
指数部分を比較すると, $2x = 1$ となるので, $x = \frac{1}{2}$ 同様に, $\sqrt[3]{b} = b^y$ の両辺を 3 乗すると, $b = b^{3y}$ 指数部分を比較すると, $3y = 1$ となるので, $y = \frac{1}{3}$

34 (1) $-\infty$ (2) 0

【解説】

(1) 負の数のまま絶対値が大きくなるので$-\infty$に発散する。

(2) 負の数のまま絶対値が 0 に近づくので, 0 に収束する。

35 (1) 2.0×10^5 (2) 1.7×10^{-24} (3) 1.5×10^8

【解説】

(1) $2.5 \times 10^{-2} \times 8.0 \times 10^6 = 2.5 \times 8.0 \times 10^{-2+6}$
$= 20 \times 10^4 = 2.0 \times 10 \times 10^4 = 2.0 \times 10^5$

(注) 2×10^5 とするのは誤り

(2) $\frac{1}{6.0 \times 10^{23}} = \frac{1}{6.0} \times 10^{-23}$
$= 0.166 \cdots \times 10^{-23} \fallingdotseq 0.17 \times 10^{-23}$
$= 1.7 \times 10^{-1} \times 10^{-23} = 1.7 \times 10^{-24}$

(3) $\frac{1}{10^{-n}} = (10^{-n})^{-1} = 10^n$ であることに注意する。

$\frac{4500}{3.0 \times 10^{-5}} = \frac{4500}{3.0} \times 10^5 = 1500 \times 10^5$
$= 1.5 \times 10^3 \times 10^5 = 1.5 \times 10^8$

36 (1) ① $\vec{a} = (3,-1)$ ② $\vec{b} = (-3,4)$
③ $\vec{c} = (4,2)$ ④ $\vec{d} = (-3,-2)$

(2) ① $|\vec{a}| = \sqrt{10}$ ② $|\vec{b}| = 5$
③ $|\vec{c}| = 2\sqrt{5}$ ④ $|\vec{d}| = \sqrt{13}$

(3) ① $3\vec{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$ $|3\vec{a}| = 3\sqrt{10}$

② $-\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ $|-\vec{b}| = 5$

③ $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $|\vec{a} + \vec{b}| = 3$

④ $\vec{c} - 2\vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \end{pmatrix}$ $|\vec{c} - 2\vec{b}| = 2\sqrt{34}$

【解説】

(2) ① $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$

② $|\vec{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

③ $|\vec{c}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

④ $|\vec{d}| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

(3) ① $3\vec{a} = 3\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$

$|3\vec{a}| = 3\sqrt{3^2 + (-1)^2} = 3\sqrt{10}$

② $-\vec{b} = -\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

$|-\vec{b}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

③ $\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$

$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ より,

$|\vec{a}+\vec{b}|=3\sqrt{0^2+1^2}=3$

④ $\vec{c}-2\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-6\end{pmatrix}$

$\vec{c}-2\vec{b}=\begin{pmatrix}10\\-6\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$ より,

$|\vec{c}-2\vec{b}|=2\sqrt{5^2+(-3)^2}=2\sqrt{34}$

37 $\vec{v}_1=\begin{pmatrix}-3\sin\theta_1\\3\cos\theta_1\end{pmatrix}$, $\vec{v}_2=\begin{pmatrix}-4\sin\theta_2\\-4\cos\theta_2\end{pmatrix}$

【解説】

各ベクトルの向きから, $\vec{v}_1$ の x 成分は負, y 成分は正で, $\vec{v}_2$ は各成分がともに負であることに注意する。

38 $\sqrt{41}$

【解説】

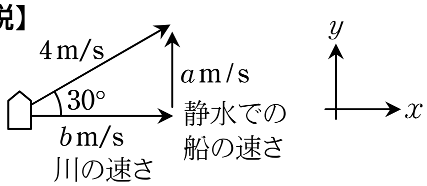
$\vec{a}-2\vec{b}=(-9,-4,8)-2(-4,1,3)$
$=(-9,-4,8)+(8,-2,-6)$
$=(-1,-6,2)$　よって,

$|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+(-6)^2+2^2}=\sqrt{41}$

39 (1) $a=2.0\,\mathrm{m/s}$, $b=3.0\,\mathrm{m/s}$

(2) 約 37° ,14 s

【解説】



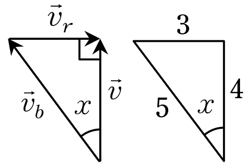
(1) 図のように岸の出発点を A, 到達点を B とすると, $30=\mathrm{AB}\sin 30°=\frac{1}{2}\mathrm{AB}$ であるので, $\mathrm{AB}=60\,\mathrm{m}$ となる。この対岸までの 60 m を 15 秒で渡ったので, 実際の船の速さは $60\div 15=4.0\,\mathrm{m/s}$ となる。この速さは, 静水で進むときの船の速度と川の速度の合成速度の大きさであるので, 右図のように x,y 方向に速度を分解すると,

$a=4.0\sin 30°=4.0\times\frac{1}{2}=2.0\,\mathrm{m/s}$

$b=4.0\cos 30°=4.0\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}\,\mathrm{m/s}$

$\fallingdotseq 2.0\times 1.73\fallingdotseq 3.46\fallingdotseq 3.5\,\mathrm{m/s}$

(2) 船の速度を $\vec{v}_b$, 川の速度を $\vec{v}_r$, これらを合成した速度を $\vec{v}$ とすると, $\vec{v}=\vec{v}_b+\vec{v}_r$ となり, 図のように合成速度が岸に垂直になるためには,



$|\vec{v}|^2+|\vec{v}_r|^2=|\vec{v}_b|^2$ となるので,

$|\vec{v}|^2+3^2=5^2$ より, $|\vec{v}|=4.0\,\mathrm{m/s}$

$\cos x=\frac{4}{5}=0.8$　三角関数表より $x\fallingdotseq 37$

$|\vec{v}|=4.0$ より船は岸に垂直に 4.0 m/s で進むので, かかる時間は $\frac{56}{4.0}=14\,\mathrm{s}$

【別解】

川の速度ベクトル, 船の速度ベクトルをそれぞれ, $\vec{v}_r=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}_b=\begin{pmatrix}-5\sin x\\5\cos x\end{pmatrix}$ とおくと,

$\vec{v}_r+\vec{v}_b=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5\sin x\\5\cos x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-5\sin x\\5\cos x\end{pmatrix}$

川に対して垂直に進むとき, 合成速度の x 成分は 0 であるので, $3-5\sin x=0$,

$\sin x=\frac{3}{5}=0.6$　よって, $x\fallingdotseq 37°$

$\sin x=\frac{3}{5}$ のとき, $\cos x=\frac{4}{5}$ より, 合成速度の y 成分は, $5\cos x=4\,\mathrm{m/s}$

よって, $56\div 4=14\,\mathrm{s}$

40 (1) $-8\,\mathrm{m/s}$　(2) $8\,\mathrm{m/s}$　(3) $6\,\mathrm{m/s}$　(4) $-6\,\mathrm{m/s}$

【解説】

相対速度＝相手の速度－基準の速度 であることに注意する。以下は右向きを正として考える。

(1) $-5.0-3.0=-8.0\,\mathrm{m/s}$

(2) $3.0-(-5.0)=8.0\,\mathrm{m/s}$

(3) $4.0-(-2.0)=6.0\,\mathrm{m/s}$

(4) $-2.0-4.0=-6.0\,\mathrm{m/s}$

41 (1) 向き:西　大きさ:10 m/s

(2) 向き:北西　大きさ:28 m/s

【解説】

(1) 東向きを正とすると,

相対速度$=10-20=-10$ m/s

よって,負なので西向きに 10 m/s

(2) 東向きを x 軸の正の向き,北向きを y 軸の正の向きとする。

東向きに 20 m/s で進む電車の速度を $\vec{v}_0=\begin{pmatrix}20\\0\end{pmatrix}$,北向きに20 m/sで進む電車の速度を $\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\20\end{pmatrix}$ とする。

相対速度

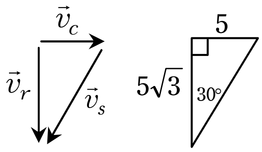
$=\vec{v}-\vec{v}_0=\begin{pmatrix}0\\20\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}20\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-20\\20\end{pmatrix}$

よって成分から向きは北西となり,その大きさは,$\sqrt{(-20)^2+20^2}=20\sqrt{2}\fallingdotseq 28$ m/s

42 地面に対する雨の速さ:8.7 m/s

自動車の速さ:15 m/s

【解説】



地面に対する雨の速度を $\vec{v}_r$,自動車の速度を $\vec{v}_c$,自動車に対する雨の相対速度を $\vec{v}_s$ とすると,

$\vec{v}_s=\vec{v}_r-\vec{v}_c$ であり,図より,

$|\vec{v}_c|:|\vec{v}_r|=1:\sqrt{3}$ であるので,

$|\vec{v}_r|=\sqrt{3}\,|\vec{v}_c|$

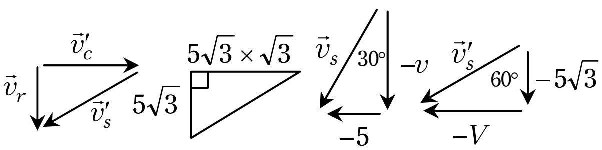
$=5\sqrt{3}\fallingdotseq 5\times 1.73=8.65\fallingdotseq 8.7$ m/s

さらに,速さを増したあとの自動車の速度を $\vec{v}_c'$,自動車に対する雨の相対速度を $\vec{v}_s'$ とすると,

$\vec{v}_s'=\vec{v}_r-\vec{v}_c'$ であり,図より,$|\vec{v}_c'|:|\vec{v}_r'|=\sqrt{3}:1$ で,$|\vec{v}_r|=5\sqrt{3}$ であるので,

$|\vec{v}_c|=\sqrt{3}\,|\vec{v}_r|=\sqrt{3}\times 5\sqrt{3}=15$ m/s

【別解】



地面に対する雨の速度を $\vec{v}_r=\begin{pmatrix}0\\-v\end{pmatrix}$,自動車の速度を,$\vec{v}_c=\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$,自動車に対する雨の相対速度を $\vec{v}_s$ とおくと,$\vec{v}_s=\vec{v}_r-\vec{v}_c$ より,

$\vec{v}_s=\begin{pmatrix}0\\-v\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-v\end{pmatrix}$ で,

雨は鉛直方向から30°傾いているので,

$\dfrac{5}{v}=\tan 30°=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

よって,$v=5\sqrt{3}\fallingdotseq 8.7$ m/s

さらに速さを増した自動車の速度を $\vec{v}_c'=\begin{pmatrix}V\\0\end{pmatrix}$,雨の速度を $\vec{v}_r=\begin{pmatrix}0\\-5\sqrt{3}\end{pmatrix}$,自動車に対する雨の相対速度を $\vec{v}_s'$ とおくと,$\vec{v}_s'=\vec{v}_r-\vec{v}_c'$ より,

$\vec{v}_s'=\begin{pmatrix}0\\-5\sqrt{3}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}V\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-V\\-5\sqrt{3}\end{pmatrix}$ で,雨は鉛直方向から60°傾いているので,

$\dfrac{V}{5\sqrt{3}}=\tan 60°=\sqrt{3}$　よって,$V=15$ m/s

43 速さ:1.8 m/s

斜面を移動した距離:2.7 m

【解説】

(1) 初速度が 0 なので,t 秒後の速さ v は $v=0.60t$ となる。3.0 秒後では,

$v=0.60\times 3.0=1.8$ m/s

(2) t 秒後の変位 x は $x=\dfrac{1}{2}\times 0.60t^2=0.30t^2$ であるので,3.0 秒後では,

$x=0.30\times 3.0^2=2.7$ m

44 速さ:19.6 m/s　井戸の深さ:19.6m

【解説】

初速度が0なので,t 秒後の速さ v は $v=9.8t$ となる。2.0 秒後では $v=9.8\times 2.0=19.6$ m/s

t 秒後の変位 x は $x=\dfrac{1}{2}\times 9.8t^2=4.9t^2$ であるので,2.0 秒後では $x=4.9\times 2.0^2=19.6$ m

45 (1) 42 m/s　(2) 90 m

【解説】

(1) 初速度が 2.8 m/s なので, t 秒後の速さ v は $v=2.8+9.8t$ となる。4.0 秒後では,

$v=2.8+9.8\times4.0=42\,\mathrm{m/s}$

(2) t 秒後の変位 x は

$x=2.8t+\dfrac{1}{2}\times9.8t^2=2.8t+4.9t^2$ であるので,

4.0 秒後では,

$x=2.8\times4.0+4.9\times4.0^2=89.6\fallingdotseq90\,\mathrm{m}$

46 (1) 2.0 秒後　(2) 19.6 m　(3) 4.0 秒後

【解説】

(1) 初速度が 19.6 m/s なので, t 秒後の速さ v は, $v=19.6-9.8t$ となる。最高点では $v=0$ なので, $0=19.6-9.8t$　これを解くと, $t=2.0\,\mathrm{s}$

(2) t 秒後の高さ x は,

$x=19.6t-\dfrac{1}{2}\times9.8t^2=19.6t-4.9t^2$

(1) より 2.0 秒後に最高点に達するので, このときの高さ x は,

$x=19.6\times2.0-4.9\times2.0^2=19.6\,\mathrm{m}$

【別解】

公式 ${v_2}^2-{v_1}^2=2\cdot(-g)\cdot s$ を使うと,

$0^2-19.6^2=2\cdot(-9.8)\cdot s$　これを解くと,

$s=19.6\,\mathrm{m}$

(3) t 秒後の高さ x は $x=19.6t-4.9t^2$

$x=0$ のとき, $0=19.6t-4.9t^2$ より,

$t(19.6-4.9t)=0$　$t\neq0$ より, $t=4.0\,\mathrm{s}$

47 (1)　$v=6t-2$, $a=6$

(2) 瞬間の速度:10 瞬間の加速度:6

【解説】

(1)　$v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=(3t^2-2t+1)'=6t-2$

$a=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=(6t-2)'=6$

(2)　$t=2$ のとき, $v=6\times2-2=10$ で, 加速度 a は時刻に関わらず常に 6 である。

48 (1)　$\vec{v}=(3t^2,4t+1)$, $\vec{a}=(6t,4)$

(2) 瞬間の速さ: $\sqrt{34}$

瞬間の加速度の大きさ: $2\sqrt{13}$

【解説】

(1)　$\vec{v}=\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)=((t^3-1)',(2t^2+t)')$

$=(3t^2,4t+1)$

$\vec{a}=\left(\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)=((3t^2)',(4t+1)')=(6t,4)$

(2)　$t=1$ のとき, $\vec{v}=(3\times1^2,4\times1+1)=(3,5)$

よって, $|\vec{v}|=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$

また, $t=1$ のとき, $\vec{a}=(6\times1,4)=(6,4)$

よって, $|\vec{a}|=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}$

49 (1)　$x=3t^2+2t$　(2) 移動距離:11

平均の加速度:6

【解説】

(1)　$x=\displaystyle\int v\,\mathrm{d}t=\int(6t+2)\,dt=3t^2+2t+C$

物体は時刻 0 で原点にあるので, $t=0$ のとき $x=0$ である。よって, 積分定数 C は 0 となり, $x=3t^2+2t$ となる。

(2)　$x=\displaystyle\int_1^2 6t+2\,\mathrm{d}t=\Big[3t^2+2t\Big]_1^2$

$=(12+4)-(3+2)=11$

加速度は, $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=(6t+2)'=6$ となり, 時刻に関わらず常に 6

50 (1) $t=2.0\,\mathrm{s}$　(2) $s=39\,\mathrm{m}$　(3) $v=28\,\mathrm{m/s}$

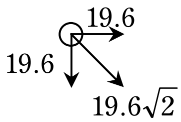
【解説】

(1) 求める時間は, 小球を同じ高さから自由落下させたときと同じであるので, 公式 $y=\dfrac{1}{2}gt^2$ より, $19.6=\dfrac{1}{2}\times9.8\times t^2$　これを解くと, $t=2.0\,\mathrm{s}$

(2) 水平方向の運動は速さが一定であるので, 初速が 19.6 m/s, (1) より地面に到達するまでに 2.0 s かかるので,

$s=19.6\times2.0=39.2\fallingdotseq39\,\mathrm{m}$

(3) 時刻 2.0 s での鉛直方向の速さを求めると, 公式 $v_y=gt$ (鉛直下向きを正) より,



$v_y=9.8\times2.0=19.6\,\mathrm{m/s}$

よって, 地面に到達する直前の速度の水平方向, 鉛直方向の成分はともに 19.6 m/s である

ので，このときの速さ v は，

$v=\sqrt{(19.6)^2+(19.6)^2}$

$=19.6\sqrt{2}\fallingdotseq 27.6\fallingdotseq 28\ \mathrm{m/s}$

51 (1) $t_1=2.0\ \mathrm{s}$ (2) $h=20\ \mathrm{m}$，$x_1=68\ \mathrm{m}$

(3) $t_2=4.0\ \mathrm{s}$，$x_2=136\ \mathrm{m}$

【解説】

(1) 初速の y 成分は $39.2\sin 30°=19.6\ \mathrm{m/s}$ である。求める時間は，この初速で鉛直上向きに投げ上げたときに，最高点に達するまでの時間と等しい。鉛直上向きに投げあげるとき，最高点での速さは 0 であるので，公式 $v_y=v_0-gt$ より，$0=19.6-9.8t_1$ これを解くと $t_1=2.0\ \mathrm{s}$

(2) 初速の x 成分は $39.2\cos 30°=33.9\ \mathrm{m/s}$ より，$x_1=33.9\times 2.0=67.8\fallingdotseq 68\ \mathrm{m}$

公式 $y=v_0t-\dfrac{1}{2}gt^2$ より，

$h=19.6\times 2.0-\dfrac{1}{2}\times 9.8\times 2.0^2$

$=19.6\fallingdotseq 20\ \mathrm{m}$

【別解】

$v_2{}^2-v_1{}^2=2\cdot(-g)\cdot s$ より，

$0^2-19.6^2=2\cdot(-9.8)\cdot h$

これを解いて $h=19.6\ \mathrm{m}$

(3) 公式 $y=v_0t-\dfrac{1}{2}gt^2$ より，時刻 t_2 のとき，

$y=0$ として，$0=19.6t_2-\dfrac{1}{2}\times 9.8t_2{}^2$

$t_2\neq 0$ よりこれを解くと $t=4.0\ \mathrm{s}$

また，$x_2=33.9\times 4.0=135.6\fallingdotseq 136\ \ \mathrm{m}$

【別解】

投げてから最高点に達するまでの時間と最高点から地面に到達するまでの時間は等しいので，

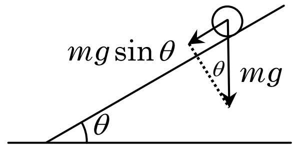
$t_2=2t_1=2\times 2.0=4.0$ また，投げてから最高点までの水平距離と，最高点から地面に到達するまでの水平距離は等しいので，

$x_2=2x_1=2\times 67.8=135.6\fallingdotseq 136\ \mathrm{m}$

52 (1) $-g\sin\theta$

(2) $\dfrac{v_0}{g\sin\theta}$ (3) $\dfrac{v_0{}^2}{2g\sin\theta}$

【解説】



(1) 加速度を a として斜面に沿った向きの運動方程式を立てると，$ma=-mg\sin\theta$ より，$a=-g\sin\theta$ よって加速度は $-g\sin\theta$ となる。

(2) 発射してから t 秒後の速さは，$v=v_0-(g\sin\theta)t$ と表すことができる。最高点では $v=0$ であるので，

$0=v_0-(g\sin\theta)t$ これを t について解くと，

$t=\dfrac{v_0}{g\sin\theta}$

(3) 公式 $v_2{}^2-v_1{}^2=2as$ より，

$0^2-v_0{}^2=2(-g\sin\theta)s$

これを s について解くと $s=\dfrac{v_0{}^2}{2g\sin\theta}$

【別解】

出発してから t s 後の移動距離を y とすると，

$y=v_0t-\dfrac{1}{2}(g\sin\theta)t^2$

よって，(2)より $t=\dfrac{v_0}{g\sin\theta}$ のとき，

$y=v_0\left(\dfrac{v_0}{g\sin\theta}\right)-\dfrac{1}{2}(g\sin\theta)\left(\dfrac{v_0}{g\sin\theta}\right)^2$

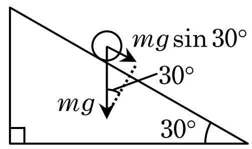
$=\dfrac{v_0{}^2}{2g\sin\theta}$

53 (1) $a_x=0$，$a_y=-\dfrac{g}{2}$

(2) $v_x=v_0\cos\theta$，$v_y=v_0\sin\theta-\dfrac{g}{2}t$

(3) $\left(v_0t\cos\theta,\ v_0t\sin\theta-\dfrac{g}{4}t^2\right)$

【解説】



(1) x 軸方向は外力がはたらかないので，$a_x=0$ また，y 軸方向の運動方程式は図より，

$ma_y = -mg\sin 30°$

よって, $a_y = -g\sin 30° = -\dfrac{g}{2}$ となる。

(2) $\vec{a} = \left(\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\right) = \left(0, -\dfrac{g}{2}\right)$ より,

$\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 0$, $\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{g}{2}$

速度の x 成分は初速が v_0 であるので,

$v_x = v_0\cos\theta$

$v_y = \int -\dfrac{g}{2}\mathrm{d}t = -\dfrac{g}{2}t + C$　$t = 0$ のとき,

$v_y = v_0\sin\theta$ より, 積分定数 C は $v_0\sin\theta$ となるので, $v_y = v_0\sin\theta - \dfrac{g}{2}t$

(3) $\vec{v} = \left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) = \left(v_0\cos\theta, v_0\sin\theta - \dfrac{g}{2}t\right)$

であるので,

$x = \int v_0\cos\theta\,\mathrm{d}t = (v_0\cos\theta)t + C_x$

(C_x は積分定数)

$y = \int (v_0\sin\theta - \dfrac{g}{2}t)\mathrm{d}t$

$= v_0\sin\theta\cdot t - \dfrac{g}{4}t^2 + C_y$ (C_y は積分定数)

$t = 0$ のとき小球は原点にあるので $C_x = 0$, $C_y = 0$ となる。よって, $x = v_0 t\cos\theta$, $y = v_0 t\sin\theta - \dfrac{g}{4}t^2$

54 抵抗力: 4.4×10^{-7} N　　k: 5.5×10^{-7}

【解説】

雨滴の質量を m, 重力加速度を g とすると, 速さが一定になったときの運動方程式は, $m\cdot 0 = mg - kv$　となるので, 抵抗力 kv について解くと,

$kv = mg = 4.5\times10^{-8}\times 9.8 = 4.41\times10^{-7}$

$\fallingdotseq 4.4\times10^{-7}$ N　また, この式より,

$k = \dfrac{4.41\times10^{-7}}{v} = \dfrac{4.41\times10^{-7}}{0.80} = 5.5125\times10^{-7}$

$\fallingdotseq 5.5\times10^{-7}$

55 (1) 速さ:56 km/h 向き:東　(2) 35 km/h

【解説】

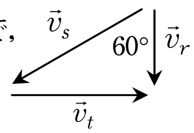
(1) 東向きを正とし, 電車の速度を $\vec{v}_t$, 人の速度を $\vec{v}_h$ とすると, $\vec{v}_t = 60$, $\vec{v}_h = -4$ より, このベクトルを合成したものが地表にたいする速度であるので,

$\vec{v}_t + \vec{v}_h = 60 - 4 = 56$ km/h

この値は正なので, 電車の中の人は地表から東向きに 56 km/h で移動しているように見える。

※成分が1つだけのベクトルを1次元ベクトルという。これも向きを持つベクトル量であるので注意。スカラー量は向きを持たず, 大きさだけを持つ。 ※速度→ベクトル量　速さ→スカラー量

(2) 相対速度＝相手の速度－基準の速度　であるので電車に対する雨の相対速度を $\vec{v}_s$, 電車の速度を $\vec{v}_t$, 雨の速度を $\vec{v}_r$ とすると, $\vec{v}_s = \vec{v}_r - \vec{v}_t$ となるので, これを図にすると次のようになる。



$|\vec{v}_r| : |\vec{v}_t| = 1 : \sqrt{3}$ となるので,

$|\vec{v}_r| = \dfrac{|\vec{v}_t|}{\sqrt{3}} = \dfrac{60}{\sqrt{3}} = \dfrac{60\sqrt{3}}{3}$

$= 20\sqrt{3} \fallingdotseq 34.6 \fallingdotseq 35$　km/h

56 430m

【解説】

水平方向に移動する飛行機から物体を落下させるので, 物体は水平投射されることになる。つまり物体は高さ 90 m から水平に初速度 360 km/h で投げ出されることになる。

ここで 360 km/h＝$\dfrac{360\times10^3}{60^2}$ m/s＝100 m/s

重力加速度の大きさを g とする。高さ 90 m から荷物を自由落下させると, t 秒後には $y = \dfrac{1}{2}gt^2$ だけ落下する。$y = 90$ のとき,

$90 = \dfrac{1}{2}gt^2$ となり, t について解くと,

$t = \sqrt{\dfrac{180}{g}} = \sqrt{\dfrac{2\times90}{9.8}} = \sqrt{\dfrac{90}{4.9}} = \sqrt{\dfrac{900}{49}} = \dfrac{30}{7}$ となり, 荷物は $\dfrac{30}{7}$ s 後に地面に到達する。

水平投射でも $\dfrac{30}{7}$ s 後に落下するので，到達する水平距離は，

$100\,\mathrm{m/s}\times\dfrac{30}{7}\mathrm{s}=\dfrac{3000}{7}=428\fallingdotseq 430\,\mathrm{m}$

57 (1) 5.0 m/s (2) 5.0 m/s

(3) $\vec{v}_{\mathrm{AB}}$:d, $\vec{v}_{\mathrm{C}}$:h

【解説】

(1) x 軸を東向き，y 軸を北向きにとる。船 A,B の速度をそれぞれ $\vec{v}_{\mathrm{A}}=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$，$\vec{v}_{\mathrm{B}}=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ とすると，$\vec{v}_{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$

よって，$\left|\vec{v}_{\mathrm{AB}}\right|=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5\,\mathrm{m/s}$

(2) A に乗っている人から見ると，C は北の方から 3.0 m/s の速さで近づいてくるように見えることから，A に対する C の相対速度は $\vec{v}_{\mathrm{CA}}=\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$ とおける。船 A,C の速度をそれぞれ $\vec{v}_{\mathrm{A}}=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$，$\vec{v}_{\mathrm{C}}$ とすると，相対速度＝相手の速度－基準の速度 であるので，

$\vec{v}_{\mathrm{AC}}=\vec{v}_{\mathrm{C}}-\vec{v}_{\mathrm{A}}$ よって，

$\vec{v}_{\mathrm{C}}=\vec{v}_{\mathrm{AC}}+\vec{v}_{\mathrm{A}}=\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$

よって，$|\vec{v}_{\mathrm{C}}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5.0\,\mathrm{m/s}$

(3) (1)より，$\vec{v}_{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$ であるので d

(2)より $\vec{v}_{\mathrm{C}}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ であるので，h となる。

58 (1) $\vec{r}=\begin{pmatrix}v_0\cos\theta\cdot t\\ v_0\sin\theta\cdot t-\dfrac{1}{2}gt^2\end{pmatrix}$

$\vec{v}=\begin{pmatrix}v_0\cos\theta\\ v_0\sin\theta-gt\end{pmatrix}$ $\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\-g\end{pmatrix}$

(2) $t_1=\dfrac{v_0\sin\theta}{g}$，$h=\dfrac{{v_0}^2\sin^2\theta}{2g}$

(3) $t_2=\dfrac{2v_0\sin\theta}{g}$，$\ell=\dfrac{{v_0}^2\sin 2\theta}{g}$

(4) $\theta=45°$，$L=\dfrac{{v_0}^2}{g}$

【解説】

(1) 斜方投射は水平軸の射影が等速直線運動，鉛直軸の射影が鉛直投げ上げ運動である。

(2) 最高点($t=t_1$) では $\vec{v}$ の y 成分が 0 になるので，$v_0\sin\theta-gt_1=0$ よって，

$t_1=\dfrac{v_0\sin\theta}{g}$

このとき $\vec{r}$ の y 成分が最高点までの高さ h となるので，$h=v_0\sin\theta\cdot t_1-\dfrac{1}{2}g{t_1}^2$

$=v_0\sin\theta\cdot\dfrac{v_0\sin\theta}{g}-\dfrac{1}{2}g\left(\dfrac{v_0\sin\theta}{g}\right)^2$

$=\dfrac{{v_0}^2\sin^2\theta}{2g}$

【別解】

公式: ${v_2}^2-{v_1}^2=2\cdot(-g)\cdot s$ を用いると，

$0^2-(v_0\sin\theta)^2=2\cdot(-g)\cdot h$ より，

$h=\dfrac{{v_0}^2\sin^2\theta}{2g}$

(3) 落下するまでの時間が

$t_2=2t_1=\dfrac{2v_0\sin\theta}{g}$ で，このとき $\vec{r}$ の x 成分が水平距離 ℓ となるので，

$\ell=(v_0\cos\theta)\cdot t_1=v_0\cos\theta\times\dfrac{v_0\sin\theta}{g}$

$=\dfrac{v_0\cos\theta\sin\theta}{g}$

$=\dfrac{v_0\cdot 2\cos\theta\sin\theta}{2g}=\dfrac{v_0\sin 2\theta}{2g}$

※公式 $2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta$ を利用する。

(4) (3)より，$\ell=\dfrac{{v_0}^2\sin 2\theta}{g}$ で

$-1\leqq\sin 2\theta\leqq 1$ であるので，$\sin 2\theta=1$ で ℓ が最大となる。このとき $2\theta=90°$ であるので，$\theta=45°$ また，$\sin 2\theta=1$ のとき $\ell=L$ となるので，$L=\dfrac{{v_0}^2}{g}$

59 (1) $t=\dfrac{L}{v_0}$ (2) $h'=h-\dfrac{gL^2}{2v_0^2}$

(3) $v_0 > L\sqrt{\dfrac{g}{2h}}$

【解説】

(1) Q を原点として，水平右向きに x 軸，鉛直下向きに y 軸をとると，打ち出してから t 秒後の物体 A の速度は $\vec{v}=(v_0,\,gt)$，位置ベクトルは $\vec{p}=\left(v_0t,\,\dfrac{1}{2}gt^2\right)$ と表される。物体 A が R に達するのは，位置ベクトルの x 成分が L になるときなので，$L=v_0t$ とすると，$t=\dfrac{L}{v_0}$ となる。

(2) 物体 A が y 軸方向に落下する距離(PR) は，$t=\dfrac{L}{v_0}$ のときの $\vec{p}$ の y 成分である。よってこの落下距離は，$\dfrac{1}{2}g\left(\dfrac{L}{v_0}\right)^2=\dfrac{gL^2}{2v_0^2}$ となるので，

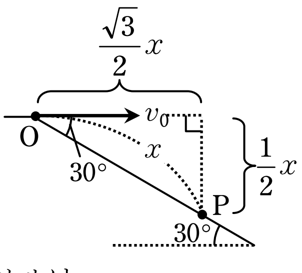
地上からの高さは，$h'=h-\dfrac{gL^2}{2v_0^2}$ となる。

(3) 物体 A,B が地上に達する前に衝突するためには，衝突するときの高さ h' が正でなければならない。よって，

$h'=h-\dfrac{gL^2}{2v_0^2}>0$ とすると，$v_0>L\sqrt{\dfrac{g}{2h}}$ が得られる。

60 $\dfrac{4v_0^2}{3g}$

【解説】O を原点として，右図のように x 軸，y 軸をとり，小球を打ち出してから t 秒後に P に達したとすると，小球の速度ベクトルは，



$\vec{v}=(v_0,\,gt)$，位置ベクトルは

$\vec{p}=\left(v_0t,\,\dfrac{1}{2}gt^2\right)$ と表される。OP $=x$ とすると，

$v_0t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\cdots$①，$\dfrac{1}{2}gt^2=\dfrac{1}{2}x\cdots$②

となるので，②÷①より $\dfrac{\frac{1}{2}gt^2}{v_0t}=\dfrac{\frac{1}{2}x}{\frac{\sqrt{3}}{2}x}$

つまり，$\dfrac{gt}{2v_0}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　これを t について解くと，

$t=\dfrac{2v_0}{\sqrt{3}g}$　これを①に代入すると，

$v_0\cdot\dfrac{2v_0}{\sqrt{3}g}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$　これを x について解くと，

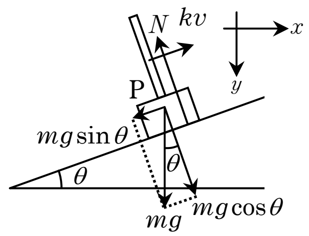
$x=\dfrac{4v_0^2}{3g}$

61 (1) $N=mg\cos\theta$　(2) $v=\dfrac{mg\sin\theta}{k}$

(3) 下図参照

【解説】

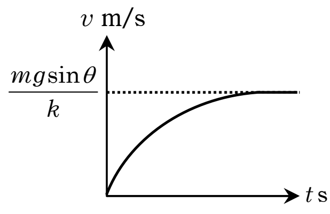
(1) P にはたらく力を書き込むと，図のようになる。P は斜面と垂直な方向に加速度をもっていないので，斜面と垂直な方向のつり合いの式より，$N=mg\cos\theta$ となる。



(2) 斜面方向の加速度を a とすると，斜面方向の運動方程式は $ma=mg\sin\theta-kv\cdots$① となり，速さが一定になっているとき加速度 a は 0 であるので，$a=0$ のとき①を v について解くと，$m\cdot 0=mg\sin\theta-kv$ より，

$v=\dfrac{mg\sin\theta}{k}$

(3) (2)の解が終端速度であるので，グラフは次のようになる。



62 (1) $(L,\,L\tan\theta)$　(2) $\dfrac{L}{v_0\cos\theta}$

(3) $\left(L,\,L\tan\theta-\dfrac{gL^2}{2v_0^2\cos^2\theta}\right)$

(4) $\left(L,\,L\tan\theta-\dfrac{gL^2}{2v_0^2\cos^2\theta}\right)$

(5) 小球 P, Q は直線 AB 上で衝突する。

【解説】

(1) $\dfrac{AB}{OB}=\tan\theta$ なので,

$AB = OB\tan\theta = L\tan\theta$

よって, A の座標は $(L, L\tan\theta)$

(2) 小球Pの時刻 t での速度ベクトル, 位置ベクトルは次のように表すことができる。

$$\vec{v}_p=\begin{pmatrix} v_0\cos\theta \\ v_0\sin\theta-gt\end{pmatrix},$$

$$\vec{p}=\begin{pmatrix} (v_0\cos\theta)t \\ (v_0\sin\theta)t-\dfrac{1}{2}gt^2\end{pmatrix}$$

水平方向に L だけ進むとき,

$(v_0\cos\theta)t=L$ となるので, このときの時刻は,

$$t=\frac{L}{v_0\cos\theta}$$

(3) $\vec{p}=\begin{pmatrix} (v_0\cos\theta)t \\ (v_0\sin\theta)t-\dfrac{1}{2}gt^2\end{pmatrix}$ に小球PがAB上に達する時刻 $t=\dfrac{L}{v_0\cos\theta}$ を代入すると,

$$\vec{p}=\begin{pmatrix} (v_0\cos\theta)\cdot\dfrac{L}{v_0\cos\theta} \\ (v_0\sin\theta)\cdot\dfrac{L}{v_0\cos\theta}-\dfrac{1}{2}g\left(\dfrac{L}{v_0\cos\theta}\right)^2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} L \\ L\tan\theta-\dfrac{gL^2}{2v_0^2\cos^2\theta}\end{pmatrix}$$

よって, P の座標は $\left(L,\ L\tan\theta-\dfrac{gL^2}{2v_0^2\cos^2\theta}\right)$

(4) 小球 Q は $(L, L\tan\theta)$ から自由落下するので, 時刻 t での小球Qへの位置ベクトルは,

$\vec{q}=\begin{pmatrix} L \\ L\tan\theta-\dfrac{1}{2}gt^2\end{pmatrix}$ となり, 小球 P が AB 上に達する時刻 $t=\dfrac{L}{v_0\cos\theta}$ では,

$$\vec{q}=\begin{pmatrix} L \\ L\tan\theta-\dfrac{1}{2}g\left(\dfrac{L}{v_0\cos\theta}\right)^2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} L \\ L\tan\theta-\dfrac{gL^2}{2v_0^2\cos^2\theta}\end{pmatrix}$$

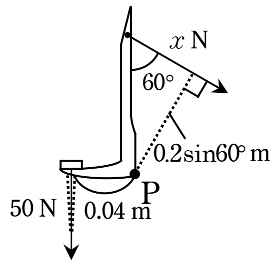
となる。よって, Q の座標は,

$$\left(L,\ L\tan\theta-\frac{gL^2}{2v_0^2\cos^2\theta}\right)$$

(5) (3), (4) の結果が等しくなることから, 小球 P, Q は衝突する。木の枝にぶら下がっている猿に狙いを定めて銃を撃ち, その音に驚いた猿は手を離して落下したとする。このとき, 弾丸は落下中の猿に命中する。これをモンキーハンティングといい, この問題はその原理を説明したものになる。

63 解説参照

【解説】



$M_1=-x\times0.2\sin60°$,

$M_2=50\times0.04=2.0$ で,

$M_1+M_2=0$ より,

$-x\times0.2\sin60°+2.0=0$

これを x ついて解くと,

$$x=\frac{2.0}{0.2\sin60°}\fallingdotseq11.5\fallingdotseq12\,\mathrm{N}$$

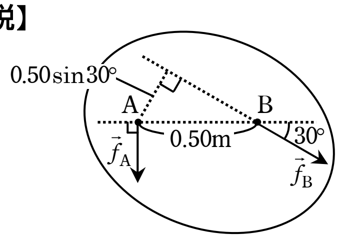
よって, 加える力が 12 N を超えると, 釘抜きが回転して釘が抜ける。

64 (1) $M_A=0\,\mathrm{N\cdot m}$, $M_B=-0.25f_B\,\mathrm{N\cdot m}$

(2) $M_C=10\,\mathrm{N\cdot m}$, $f_C=50\,\mathrm{N}$, $x=0.20\,\mathrm{m}$

【解説】

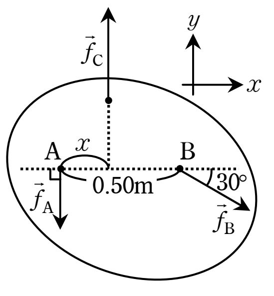
(1)



$M_A=f_A\times0=0\,\mathrm{N\cdot m}$,

$M_B=-f_B\times0.5\sin30°=-0.25f_B\,\mathrm{N\cdot m}$

(2)



点Aのまわりの f_C のモーメントを M_C とすると, $M_C=f_Cx$

金属板が回転しないためには,
$M_A + M_B + M_C = 0$ であるので,
$0 - 0.25 f_B + f_C x = 0$
$f_B = 40\,\mathrm{N}$ であるので,
$-0.25 \times 40 + M_C = 0$
つまり, $M_C = 10\,\mathrm{N \cdot m} \cdots$①
また金属板が並進運動しないためには, y 軸方向のつり合いの式より,
$f_C = f_A + f_B \sin 30°$
$f_A = 30\,\mathrm{N}$, $f_B = 40\,\mathrm{N}$ であるので,
$f_C = 30 + 40 \sin 30° = 50\,\mathrm{N} \cdots$②
また, ①より, $M_C = f_C x = 10 \cdots$③
であるので, ②,③より $x = 0.20\,\mathrm{m}$

65 (1) $M_1 = -FL$, $M_2 = -FL$
(2) ① 偶力　② 右　③ 並進運動

【解説】
(1) $M_1 = Fx - F(x + L) = -FL$,
$M_2 = -Fy - F(L - y) = -FL$
(2) 同一直線上になく, 互いに平行で逆向きの大きさが等しい2力を偶力という。左回りを正としたとき, M_1, M_2 はどちらも負であるので, この場合の偶力のモーメントは右回りの回転作用があることになる。また, 偶力は並進運動させる作用はない。※どの点のまわりでも偶力のモーメントは
｜片方の力｜×作用線間距離で求められる。

66 $\mathrm{P}\left(0, \frac{7}{5}\right)$　$\mathrm{Q}\left(2, -\frac{1}{5}\right)$

【解説】 A($\vec{a}$)　B($\vec{b}$)　　A($\vec{a}$)　B($\vec{b}$)
2 : 3　　4 : 1

原点 O に関する A,B,P,Q への位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$, $\vec{q}$ とすると,

$$\vec{p} = \frac{3\vec{a} + 2\vec{b}}{2 + 3} = \frac{3\vec{a} + 2\vec{b}}{5} = \frac{3(-2, 3) + 2(3, -1)}{5}$$
$$= \frac{(-6, 9) + (6, -2)}{5} = \frac{(0, 7)}{5} = \left(0, \frac{7}{5}\right)$$
$$\vec{q} = \frac{1\vec{a} + 4\vec{b}}{4 + 1} = \frac{\vec{a} + 4\vec{b}}{5} = \frac{(-2, 3) + 4(3, -1)}{5}$$
$$= \frac{(-2, 3) + (12, -4)}{5} = \frac{(10, -1)}{5} = \left(2, -\frac{1}{5}\right)$$

67 P(3)

A($\vec{a}$)　B($\vec{b}$)
3 : 1

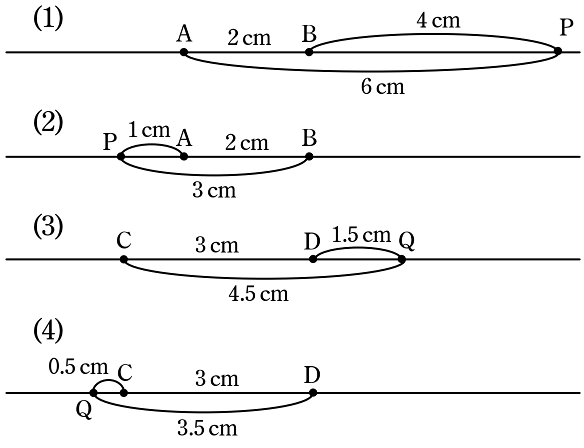
【解説】
原点 O に関する A,B,P への位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$ とすると,
$$\vec{p} = \frac{1\vec{a} + 3\vec{b}}{3 + 1} = \frac{\vec{a} + 3\vec{b}}{4} = \frac{(-3) + 3(5)}{4}$$
$$= \frac{(-3) + (15)}{4} = \frac{(12)}{4} = (3)$$

68 (8, 6)

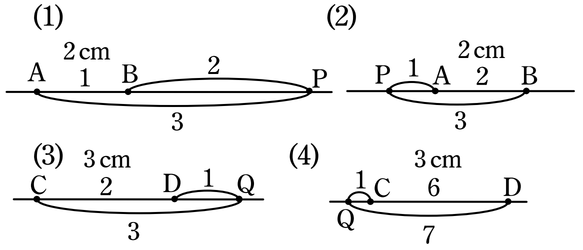
P($\vec{p}$)　Q($\vec{q}$)
2 : 3

【解説】
原点 O に関する P, Q, R の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ とすると,
$$\vec{r} = \frac{3\vec{p} + 2\vec{q}}{2 + 3} = \frac{3\vec{p} + 2\vec{q}}{5}$$
これを $\vec{q}$ について解くと,
$$\vec{q} = \frac{5\vec{r} - 3\vec{p}}{2} = \frac{5(2, 3) - 3(-2, 1)}{2}$$
$$= \frac{(10, 15) + (6, -3)}{2} = \frac{(16, 12)}{2} = (8, 6)$$

69

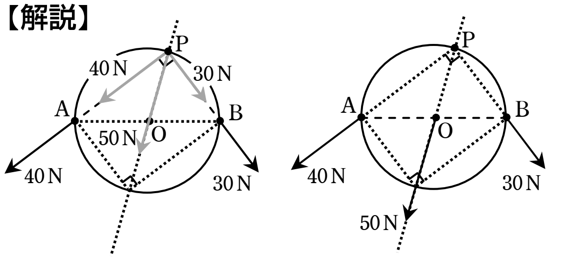


【解説】



70 50 N　作図は解説参照

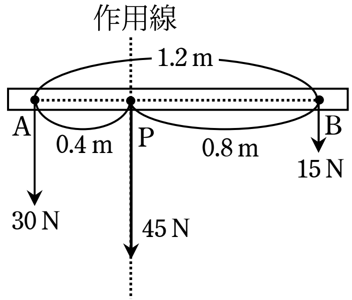
【解説】



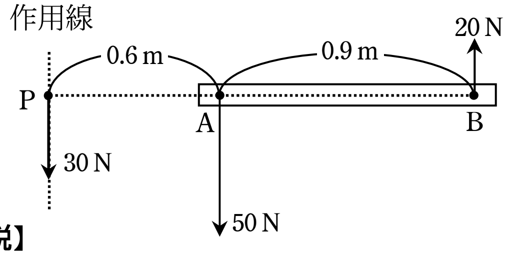
AB が直径であるので, ∠PAB は直角となる。よって図のように 2 つの力の合力の大きさは三平方の定理によって 50N となり, 合力の作用点は円の中心 O を通る。

71

(1)



(2)



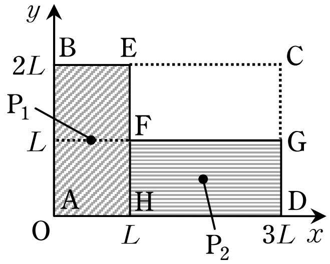
【解説】

(1) 2 つの力は同じ向きで平行であるので, 合力の大きさは $30+15=45$ N となる。力の大きさの比は 2:1 であるので, 合力の作用線は AB を 1:2 に内分した点 P を通り, 合力は 2 つの力と同じ向きになる。

(2) 2 つの力は逆向きで平行であるので, 合力の大きさは $50-20=30$ N となる。力の大きさの比は 5:2 であるので, 合力の作用線は AB を 2:5 に外分した点 P を通り, 合力の向きは, 2 つの力のうち, 大きさが大きい方の向きと同じになる。

72

$\left(L, \dfrac{5}{6}L\right)$



【解説】

図のように 2 つの長方形の板に分けたとき, この 2 つの板の質量比は 2:1 であるので, それぞれの質量を $2m$, m とし, さらに, それぞれの重心を図のように P_1, P_2 とすると, それぞれの座標は $P_1\left(\dfrac{L}{2}, L\right)$, $P_2\left(2L, \dfrac{L}{2}\right)$ となる。原点 O に関する P_1, P_2 への位置ベクトルをそれぞれ $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, 重心 Z への位置ベクトルを $\vec{z}$ とすると, 公式より,

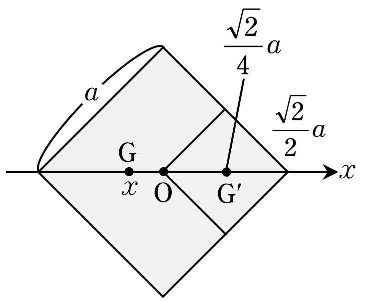
$$\vec{z}=\frac{2m\vec{p}_1+m\vec{p}_2}{2m+m}=\frac{2m\left(\dfrac{L}{2}, L\right)+m\left(2L, \dfrac{L}{2}\right)}{3m}$$

$$=\frac{\left(3L, \dfrac{5}{2}L\right)}{3}=\left(L, \frac{5}{6}L\right)$$

よって, Z の座標は $\left(L, \dfrac{5}{6}L\right)$

73 $\dfrac{\sqrt{2}}{12}a$ m

【解説】



図のように切り抜いた板と残った板を組み合わせて, 原点を O とする x 軸をとると, 対称性から G は x 軸上にあるので, O に関する G への位置ベクトルを $\vec{p}=(x)$　とする。また, 切り抜いた板の重心を G′ とすると, この座標は $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}a\right)$ であるので, O に関する G′ への位置ベクトルを $\vec{p}'=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}a\right)$ とする。

残った板と切り抜いた板の質量比は 3:1 であるので, それぞれの質量を $3m$, m とすると,

公式より　$\vec{0}=\dfrac{3m\vec{p}+m\vec{p}'}{3m+m}=\dfrac{3\vec{p}+\vec{p}'}{4}$　であるので, これを $\vec{p}$ について解くと,

$$\vec{p}=-\frac{\vec{p}'}{3}=-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{12}a\right)$$

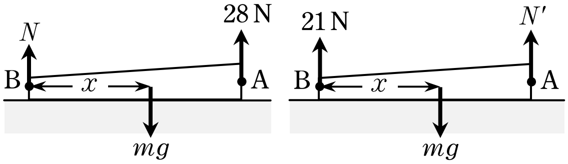
よって $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{12}a$ となるので, $\mathrm{OG}=\dfrac{\sqrt{2}}{12}a\,\mathrm{m}$

※O は線分 G′G を質量の逆比, つまり 1:3 に内分する点であることを利用して求めてもよい。

74 質量:5.0 kg

B から重心までの距離:0.80 m

【解説】



図のように B から重心までの距離を x m, 重力加速度の大きさを g m/s^2, 棒の質量を m kg として, A, B それぞれのまわりの力のモーメントのつり合いの式を立てると, B のまわりの力のモーメントのつり合い:

$28\times1.4-mgx=0$

よって, $39.2-mgx=0$ …①

A のまわりの力のモーメントのつり合い:

$mg(1.4-x)-21\times1.4=0$

よって, $1.4mg-mgx-29.4=0$ …②

②−①より $1.4mg-68.6=0$　よって,

$$m=\frac{68.6}{1.4g}=\frac{68.6}{1.4\times9.8}=5.0\,\mathrm{kg}$$

①を x について解き, $m=5.0$ を代入すると,

$$x=\frac{39.2}{mg}=\frac{39.2}{5.0\times9.8}=0.80\,\mathrm{m}$$

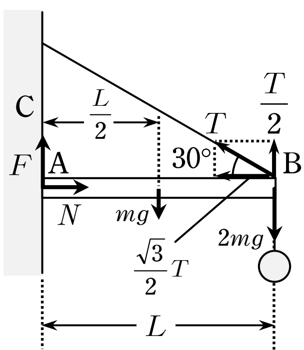
75 (1) 上向き

(2) $T=5mg$, $F=\dfrac{1}{2}mg$, $N=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}mg$

(3) $T'=4mg$, $F'=mg$, $N'=2\sqrt{3}mg$

(4) 0.29

【解説】



(1) B のまわりの力のモーメントのつり合いを考えると, 棒にはたらく重力は左回りの回転作用があるので, 棒が静止しているためには, 摩擦力は右まわりの回転作用がなければならない。したがって摩擦力は上向きとなる。

(2) 水平方向, 鉛直方向のつり合いの式は次のようになる。

水平方向: $N=\dfrac{\sqrt{3}}{2}T$ …①

鉛直方向: $F+\dfrac{T}{2}=mg+2mg$

つまり, $F+\dfrac{T}{2}=3mg$ …②　また, A のまわりの力のモーメントのつり合いの式は次のようになる。

$$\frac{T}{2}\cdot L-mg\cdot\frac{L}{2}-2mg\cdot L=0$$

両辺を L で割ると,

$$\frac{T}{2}-mg\cdot\frac{1}{2}-2mg=0$$

これを T について解くと,

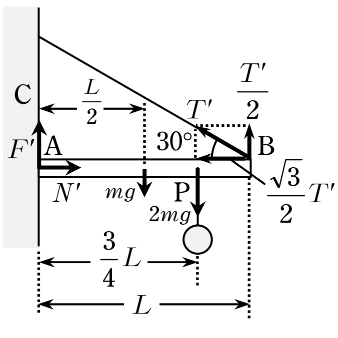
$T=5mg$　これを①に代入して,

$$N=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot5mg=\frac{5\sqrt{3}}{2}mg$$

②を F について解き, $T=5mg$ を代入すると,

$$F=3mg-\frac{T}{2}=3mg-\frac{5mg}{2}=\frac{1}{2}mg$$

(3)



つり合いの式は次のようになる。

水平方向: $N'=\dfrac{\sqrt{3}}{2}T'$ …③

鉛直方向: $F'+\dfrac{T'}{2}=mg+2mg$

つまり, $F'+\dfrac{T'}{2}=3mg$ …④

また, A のまわりの力のモーメントのつり合いの式は次のようになる。

$$\frac{T'}{2}\cdot L - mg\cdot\frac{L}{2} - 2mg\cdot\frac{3}{4}L = 0$$

両辺を L で割ると,

$$\frac{T'}{2} - mg\cdot\frac{1}{2} - 2mg\cdot\frac{3}{4} = 0$$

これを T' について解くと,

$T' = 4mg$　これを③に代入して,

$$N' = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4mg = 2\sqrt{3}mg$$

④を F' について解き, $T' = 4mg$ を代入すると, $F' = 3mg - \dfrac{T'}{2} = 3mg - \dfrac{4mg}{2} = mg$

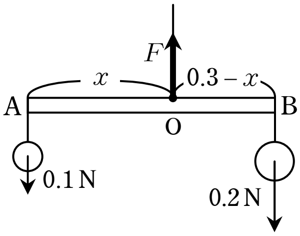
【注意】垂直抗力 N' は N に比べて小さくなるので, 摩擦力 F' も F より小さくなるのでは？と思いがちだが, そうではない。垂直抗力が小さくなっても棒が静止していられるためには, 摩擦力が大きくならなければいけない。最大静止摩擦力は垂直抗力に比例する ($R_{\max} = \mu N$) が, 静止摩擦力は垂直抗力に比例するわけではない。静止摩擦力は物体にはたらく力によって変化することに注意しよう。

(4) おもりが P の位置にあるとき, A 端がすべる限界にあり, このとき $F' = \mu N'$ となる。よって (3) の結果より,

$$\mu = \frac{F'}{N'} = \frac{mg}{2\sqrt{3}mg} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$\fallingdotseq 0.288 \fallingdotseq 0.29$

76 A から 0.2 m の位置



【解説】

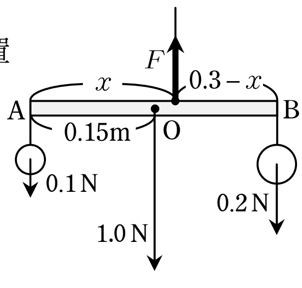
図のように糸をつり下げる位置を O とし, AO $= x$ とすると, BO $= 0.3 - x$ となる。

棒が静止するためには, O のまわりの力のモーメントがつり合うので,

$0.1x - 0.2(0.3 - x) = 0$　これを解くと,

$x = 0.2\,\mathrm{m}$

77 A から 0.16 m の位置



【解説】

図のように糸をつり下げる位置を O とし, AO $= x$ とすると,

BO $= 0.3 - x$ となる。O につける糸の張力を F とすると, 鉛直方向のつり合いの式より,

$F = 0.1 + 0.2 + 1.0 = 1.3\,\mathrm{N}$ 棒が静止するためには, A のまわりの力のモーメントがつり合うので, $Fx - 1.0\times 0.15 - 0.2\times 0.3 = 0$

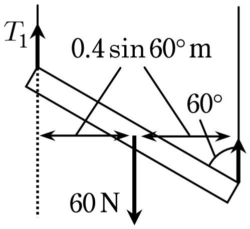
これを x について解き, $F = 1.3\,\mathrm{N}$ を代入していくと, $x = \dfrac{1.0\times 0.15 + 0.2\times 0.3}{F}$

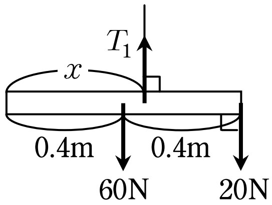
$= \dfrac{0.21}{1.3} \fallingdotseq 0.161 \fallingdotseq 0.16\,\mathrm{m}$

78 (1) $T_1 = T_2 = 30\,\mathrm{N}$

(2) $T_1 = 80\,\mathrm{N}$, $x = 0.50\,\mathrm{m}$

【解説】





(1) 鉛直方向のつり合い: $T_1 + T_2 = 60 \cdots$①

中心のまわりの力のモーメントのつり合い:

$T_2\cdot 0.4\sin 60° - T_1\cdot 0.4\sin 60° = 0$

両辺を $0.4\sin 60°$ で割ると,

$T_2 - T_1 = 0 \cdots$②　①,②より,

$T_1 = T_2 = 30\,\mathrm{N}$

(2) 鉛直方向のつり合い: $T_1 = 60 + 20$

よって, $T_1 = 80\,\mathrm{N}$

左端のまわりの力のモーメントのつり合い:

$T_1 x - 60\times 0.4 - 20\times 0.8 = 0$

$T_1 = 80\,\mathrm{N}$ を代入して x について解くと,

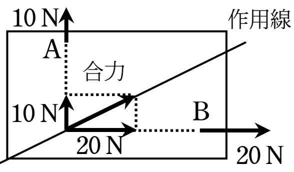
$x = 0.50\,\mathrm{m}$

79 (1) 合力の大きさ: $10\sqrt{5}\,\mathrm{N}$

(2) 合力の大きさ: 30 N

【解説】

(1)

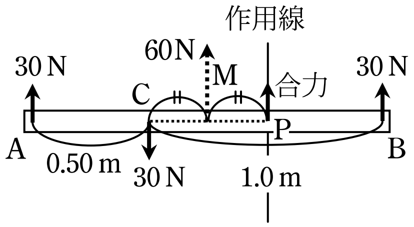


図のように, 作用線の定理によって 2 つの力

を移動させて合力を求める。この合力に沿った線が合力の作用線となる。合力の大きさは，三平方の定理によって，

$\sqrt{10^2+20^2}=10\sqrt{5}$ N と求められる。

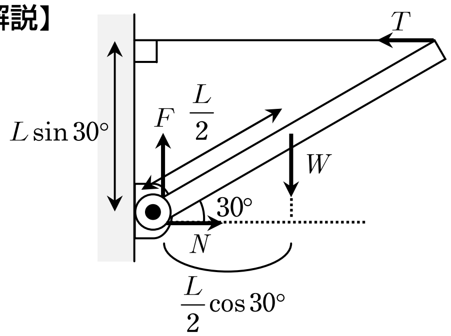
(2)



図のようにA,Bそれぞれにはたらく2力の合力の作用線は，ABを1:1に内分する点Mを通り，その大きさは $30+30=60$ N となる。Cにはたらく力と，Mにはたらく力の合力の作用線は，CMを力の大きさの逆比である2:1に外分する点Pを通り，その大きさは $60-30=30$ N となる。

80 $T=\dfrac{\sqrt{3}}{2}W$, $N=\dfrac{\sqrt{3}}{2}W$, $F=W$

【解説】



※Wは重さであり，質量ではないことに注意

水平方向のつり合い：$N=T$ …①

鉛直方向のつり合い：$F=W$ …②

ちょうつがいのまわりの力のモーメントのつり合い：$TL\sin 30°-W\dfrac{L}{2}\cos 30°=0$

これを T について解くと，$T=\dfrac{\sqrt{3}}{2}W$

①,②より，$N=\dfrac{\sqrt{3}}{2}W$, $F=W$

81 ア. $(m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3)g$

イ. $(m_1+m_2+m_3)g$

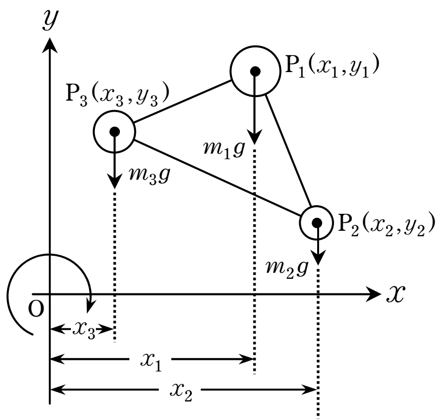
ウ. $(m_1+m_2+m_3)gx_G$

エ. $\dfrac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3}$

オ. $\dfrac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}$

カ. $\dfrac{m_1\vec{p}_1+m_2\vec{p}_2+m_3\vec{p}_3}{m_1+m_2+m_3}$

【解説】



ア. 力のモーメント＝力×腕の長さ　であるので，図のように P_1, P_2, P_3 にはたらく重力のモーメントは，それぞれ m_1gx_1 ,m_2gx_2 ,m_3gx_3 である。よってこの和は，

$M=m_1gx_1+m_2gx_2+m_3gx_3$

$=(m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3)g$ …① となる。

イ. 全体にはたらく重力の合計は

$F=m_1g+m_2g+m_3g=(m_1+m_2+m_3)g$

ウ. アと同様に考えて，

$Fx_G=(m_1+m_2+m_3)gx_G$ …②

エ. ①,②より，

$(m_1+m_2+m_3)gx_G=$

$(m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3)g$ となるので，

$$x_G=\frac{(m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3)g}{(m_1+m_2+m_3)g}$$

$$=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3}$$

オ. エを $x_1\to y_1$, $x_2\to y_2$, $x_3\to y_3$ と置き換えればよい。

よって，$y_G=\dfrac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}$

カ. $\vec{r}=(x_G, y_G)$

$$=\left(\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3}, \frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}\right)$$

$$= \frac{(m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3, m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3)}{m_1+m_2+m_3}$$

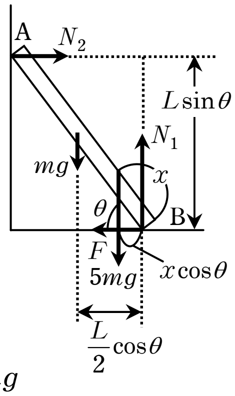
$$= \frac{m_1(x_1,y_1)+m_2(x_2,y_2)+m_3(x_3,y_3)}{m_1+m_2+m_3}$$

$$= \frac{m_1\vec{p}_1+m_2\vec{p}_2+m_3\vec{p}_3}{m_1+m_2+m_3}$$

82 (1) $F = \dfrac{3mg(L+10x)}{8L}$

(2) $x = \dfrac{7}{10}L$

【解説】



(1) 床から受ける垂直抗力を N_1, 壁から受ける垂直抗力を N_2 として, はしごにはたらく力を書き込むと図のようになる。つり合いの式を立てると次のようになる。

水平方向: $N_2 = F \cdots$①

鉛直方向: $N_1 = mg + 5mg$

つまり, $N_1 = 6mg \cdots$②

B のまわりの力のモーメントのつり合い:

$$mg\frac{L}{2}\cos\theta + 5mgx\cos\theta - N_2L\sin\theta = 0$$

両辺を $\cos\theta$ で割ると,

$$mg\frac{L}{2} + 5mgx - N_2L\tan\theta = 0$$

$\tan\theta = \dfrac{4}{3}$ であるので,

$$mg\frac{L}{2} + 5mgx - N_2L\cdot\frac{4}{3} = 0$$

N_2 について解くと

$$N_2 = \frac{3mg(L+10x)}{8L}$$ ①より,

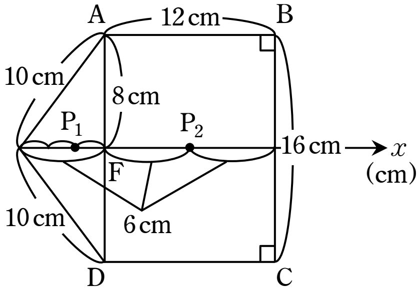
$$F = \frac{3mg(L+10x)}{8L} \cdots ③$$

(2) すべり出す直前では $F = 0.5N_1$ となるので, このとき②より, $F = 0.5\times 6mg = 3mg$ となる。これを③に代入すると,

$3mg = \dfrac{3mg(L+10x)}{8L}$ これを x について解くと, $x = \dfrac{7}{10}L$ ③式より, x が増加すると F も増加するので, x が $\dfrac{7}{10}L$ を超えると, はしごはすべり出す。

83 10.4cm

【解説】



図のように O を通り AB に平行になるように x 軸をとると, 五角形の重心は対称性から x 軸上にある。AD と x 軸の交点を F とすると, 三平方の定理より, $\mathrm{OF} = \sqrt{10^2-8^2} = 6\,\mathrm{cm}$ となる。また, △OAD の重心を $\mathrm{P_1}$, 長方形 ABCD の重心を $\mathrm{P_2}$とすると, $\mathrm{P_1}$は OF を 2:1 に内分した点であり, $\mathrm{P_2}$は長方形 ABCD の中心なのでそれぞれの座標は $\mathrm{P_1}(4)$, $\mathrm{P_2}$ (12) となる。よって,

$$\triangle\mathrm{OAD} = \frac{16\times 6}{2} = 48\,\mathrm{cm^2}$$

長方形ABCD $= 12\times 16 = 192\,\mathrm{cm^2}$ であるので, △OAD と長方形 ABCD の質量比は 48:192 = 1:4 となる。それぞれの質量を m, $4m$ とし, この五角形の重心への位置ベクトルを $\vec{r}$, $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{P_2}$ への位置ベクトルをそれぞれ $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ とすると, 公式により,

$$\vec{r} = \frac{m\vec{p}_1+4m\vec{p}_2}{m+4m} = \frac{(4)+4(12)}{5} = \left(\frac{52}{5}\right)$$

$= (10.4)$

よって, 重心は O から 10.4 cm の位置にある。

84 運動量:20 kg・m/s　運動エネルギー:40 J

【解説】

台車の質量を m,速さを v とするとき,

運動量$= mv = 5\times 4 = 20\,\mathrm{kg\cdot m/s}$

※単位は N・s でも可

運動エネルギー$= \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2}\times 5\times 4^2 = 40\,\mathrm{J}$

85 (1) $\mathrm{kg\cdot m/s^2}$　(2) $\mathrm{kg\cdot m/s}$

(3) N・s (4) N・s

86 10 N・s

【解説】

|力積|＝|力|×(力を加えた時間)で求める。

よって，$I = 2.0 \times 5.0 = 10$

87 (1) $I = 1.5\ \mathrm{N \cdot s}$　(2) $t = 5.0\ \mathrm{s}$

【解説】

(1) (前の運動量)＋(受けた力積)＝(後の運動量)より，$0.5 \times 2.0 + I = 0.5 \times 5.0$

よって，$I = 1.5\ \mathrm{N \cdot s}$

(2) $Ft = I$ より，$t = \dfrac{I}{F} = \dfrac{1.5}{0.3} \fallingdotseq 5.0\ \mathrm{s}$

88 (1) $35\ \mathrm{N \cdot s}$　(2) $5.0\ \mathrm{N}$　(3) $18.5\ \mathrm{m/s}$

【解説】

(1) グラフの三角形の面積が物体に加えられた力積なので $\dfrac{1}{2} \times 7.0 \times 10 = 35\ \mathrm{N \cdot s}$

(2) 物体に加えられた平均の力を $\overline{F}$ とすると，物体に加えられた力積は $\overline{F} \times 7.0$。これが(1)の解と等しくなるので，$\overline{F} \times 7.0 = 35$。よって，$\overline{F} = 5.0\ \mathrm{N}$

(3) $t = 7.0$ での物体の速さを v とすると，(前の運動量)＋(受けた力積)＝(後の運動量)より，$2.0 \times 1.0 + 35 = 2.0 \times v$

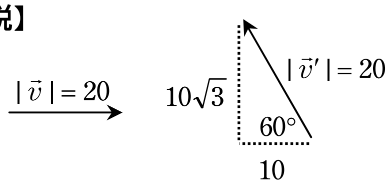
よって，$v = 18.5\ \mathrm{m/s}$

89 (1) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\vec{v}' = \begin{pmatrix} -10 \\ 10\sqrt{3} \end{pmatrix}$

(2) 水平方向より30°の向きで大きさは $8.7\ \mathrm{N \cdot s}$　(3) $1.7 \times 10^3\ \mathrm{N}$

【解説】

(1)



図より，ベクトルの成分を求める。

(2) $m\vec{v} + \vec{I} = m\vec{v}'$

$$0.25\begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} + \vec{I} = 0.25\begin{pmatrix} -10 \\ 10\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\vec{I} = 0.25\begin{pmatrix} -10 \\ 10\sqrt{3} \end{pmatrix} - 0.25\begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}$$

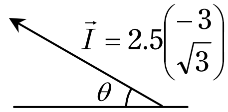
$$= 0.25\begin{pmatrix} -30 \\ 10\sqrt{3} \end{pmatrix} = 2.5\begin{pmatrix} -3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$|\vec{I}| = 2.5\sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2.5 \times \sqrt{12} = 5\sqrt{3}$

$\fallingdotseq 8.7\ \mathrm{N \cdot s}$

求める角を θ とすると，

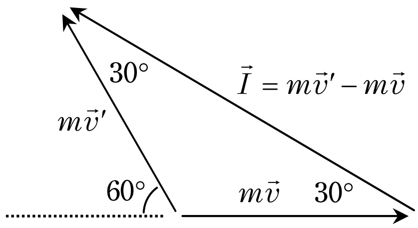
$\vec{I} = 2.5\begin{pmatrix} -3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ より，



$\tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$　よって，$\theta = 30°$

※θ は下図より30°と求められる。

※$|\vec{I}|$ は余弦定理によって求めることができる。



(3) バットがボールに加える平均の速さを $\overline{F}$ とすると，物体に加えられた力積は $\overline{F} \times 5.0 \times 10^{-3}\ \mathrm{N \cdot s}$。これが(2)の $|\vec{I}| = 5\sqrt{3}\ \mathrm{N \cdot s}$ と等しいので，

$\overline{F} \times 5.0 \times 10^{-3} = 5\sqrt{3}$

よって，$\overline{F} = \sqrt{3} \times 10^3 = 1.7 \times 10^3\ \mathrm{N}$

90 向き:左　速さ:$0.4\ \mathrm{m/s}$

【解説】

右向きを正として，Aの衝突後の速度を $v\ \mathrm{m/s}$ とする。運動量保存則より，

$0.2 \times 0.8 + 0.4 \times (-0.1) = 0.2v + 0.4 \times 0.5$

よって，$v = -0.4\ \mathrm{m/s}$　よって左向に $0.4\ \mathrm{m/s}$

91 向き:左　速さ:$0.50\ \mathrm{m/s}$

【解説】

衝突前の小球Aが進む向きを正とする。

運動量保存則より，

$1.2 \times 3.0 + 2.8 \times (-2.0) = (1.2 + 2.8)V$

これを解くと，

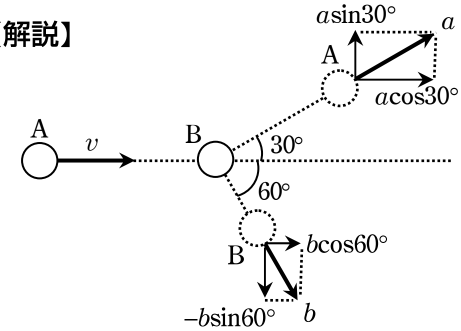
$V = -0.5\ \mathrm{m/s}$ よって左向きに $0.50\ \mathrm{m/s}$

92 (1) $\vec{v}_{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$　$\vec{v}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(2) $\vec{V}_\mathrm{A}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}a\\ \frac{1}{2}a\end{pmatrix}$, $\vec{V}_\mathrm{B}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}b\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}b\end{pmatrix}$

(3) a: $\frac{\sqrt{3}}{2}v$　b: $\frac{m}{2M}v$

【解説】



(2) 図より,

$$\vec{V}_\mathrm{A}=\begin{pmatrix}a\cos30^\circ\\ a\sin30^\circ\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}a\\ \frac{1}{2}a\end{pmatrix},$$

$$\vec{V}_\mathrm{B}=\begin{pmatrix}b\cos60^\circ\\ -b\sin60^\circ\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}b\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}b\end{pmatrix}$$

(3) 衝突の前後で運動量が保存されるので,

$$m\vec{v}_\mathrm{A}+M\vec{v}_\mathrm{B}=m\vec{V}_\mathrm{A}+M\vec{V}_\mathrm{B}$$

$$m\begin{pmatrix}v\\0\end{pmatrix}+M\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=m\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}a\\ \frac{1}{2}a\end{pmatrix}+M\begin{pmatrix}\frac{1}{2}b\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}b\end{pmatrix}$$ より,

$$mv=\frac{\sqrt{3}}{2}ma+\frac{1}{2}Mb\qquad 0=\frac{1}{2}ma-\frac{\sqrt{3}}{2}Mb$$

この a,b の連立方程式を解くと,

$$a=\frac{\sqrt{3}}{2}v,\ b=\frac{m}{2M}v$$

93 (1) ① イ　② ア　③ ア

(2) $v=\sqrt{\frac{2Mgh}{M+m}}, V=-m\sqrt{\frac{2gh}{M(M+m)}}$

【解説】

(1) 小球と台車には,鉛直方向については重力や床からの抗力などの外力がはたらいているが,水平方向については外力がはたらいていない。よって,運動量は水平成分だけ保存される。また,小球が斜面との間の摩擦,および台車と床との間の摩擦がないので,内力と重力以外の外からの力(外力)は小球または台車に対して仕事をしない。このようなときは力学的エネルギーの和が保存される。

(2) 運動量の水平成分の総和は保存されるので, $0=mv+MV$ …①

力学的エネルギーの総和は保存されるので,

$$mgh=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}MV^2\cdots②$$

①,②より v, V について解くと,

$$v=\pm\sqrt{\frac{2Mgh}{M+m}},$$

$$V=\mp m\sqrt{\frac{2gh}{M(M+m)}}$$ (複号同順) となる。

台車は水平左向きに動いたので, $V<0$ となる。よって,

$$v=\sqrt{\frac{2Mgh}{M+m}}, V=-m\sqrt{\frac{2gh}{M(M+m)}}$$

94 (1) $e\sqrt{2gh}$　(2) $e=\sqrt{\frac{h'}{h}}$

【解説】

(1) 鉛直下向きを正とする。h m の高さからボールを自由落下させ,ボールが床に接触する直前の速さを v とすると,公式 ${v_2}^2-{v_1}^2=2gx$ より, $v^2-0^2=2\times g\times h$ よって, $v=\sqrt{2gh}$

ボールが床ではねかえる直後の速さを v' とすると, $v'=ev$ より, $v'=e\sqrt{2gh}$

(2) はねかえった後の最高点での速さは 0 であるので,公式 ${v_2}^2-{v_1}^2=2(-g)x$ より,

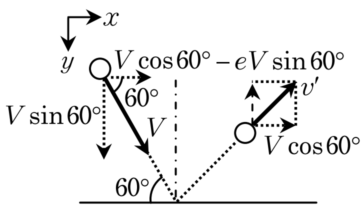
$$0^2-(e\sqrt{2gh})^2=2\times(-g)\times h'$$

これを e について解くと, $e=\sqrt{\frac{h'}{h}}$

95 (1) $\vec{v}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}V\\ \frac{\sqrt{3}}{2}V\end{pmatrix}$　$\vec{v}'=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}V\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}eV\end{pmatrix}$

(2) 0.58

【解説】



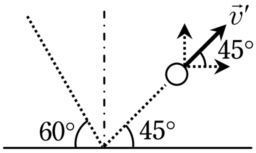
(1) なめらかな床なので,はねかえっ

た後の x 成分は変わらない。よって $\vec{v}$, $\vec{v}'$ の成分は右図のようになる。はねかえり係数は衝突面と垂直な速度成分にかけることに注意する。図より,

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}V\cos 60^\circ\\ V\sin 60^\circ\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}V\\ \frac{\sqrt{3}}{2}V\end{pmatrix}$$

$$\vec{v}'=\begin{pmatrix}V\cos 60^\circ\\ -eV\sin 60^\circ\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}V\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}eV\end{pmatrix}$$

(2) 床と 45°を成す角ではね返っているので, $\vec{v}'$ の x 成分, y 成分の大きさは等しい。



よって, $\frac{1}{2}V=\frac{\sqrt{3}}{2}eV$ より,

$$e=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\fallingdotseq 0.577\fallingdotseq 0.58$$

96 0.50

【解説】

衝突前の物体 A の進む向きを正として

$e=-\frac{v'_A-v'_B}{v_A-v_B}$ に代入して,

$$e=-\frac{(-1.5)-1.3}{4.0-(-1.6)}=\frac{2.8}{5.6}=0.50$$

97 (1) $e=\frac{v_B-v_A}{v}$

(2) ア. 作用反作用　イ. 右

ウ. $mv-\overline{F}\Delta t$　エ. $\overline{F}\Delta t$　オ. mv

(3) $v_A=\frac{1-2e}{3}v$, $v_B=\frac{1+e}{3}v$

(4) $\Delta E=-\frac{1}{3}mv^2(1-e^2)$

(5) ア. 弾性衝突　イ. 非弾性衝突

ウ. 完全非弾性衝突　① 運動エネルギー

② 一体

【解説】

(1) $e=-\frac{v_A-v_B}{v-0}=\frac{v_B-v_A}{v}$

(3) $e=\frac{v_B-v_A}{v}$, $mv=mv_A+2mv_B$

より, $v_A=\frac{1-2e}{3}v$, $v_B=\frac{1+e}{3}v$

(4) $\Delta E=\left(\frac{1}{2}m{v_A}^2+\frac{1}{2}\cdot 2m{v_B}^2\right)-\frac{1}{2}mv^2$

$$=\frac{1}{2}m\left(\frac{1-2e}{3}v\right)^2+\frac{1}{2}\cdot 2m\left(\frac{1+e}{3}v\right)^2-\frac{1}{2}mv^2$$

$$=-\frac{1}{3}mv^2(1-e^2)$$

98 ① t_1　② v_1　③ v_0　④ mv_1

⑤ mv_0　⑥ 重力　⑦ 力積　⑧ 運動量

【解説】

加速度は単位時間当たりの速度変化であるので, $g=\frac{v_1-v_0}{t_1}$ となる。よって, 両辺を mt_1 倍すると, $mgt_1=mv_1-mv_0$　mg は重力であるので, 左辺は重力×時間, つまり力積を表している。また, 質量×速度＝運動量であるので, 右辺は運動量の変化を表している。

99 $v'=v$, $I=mv$

【解説】

小球の衝突前後の速度をそれぞれ $\vec{v}$, $\vec{v}'$, 加える力積を $\vec{I}$ とすると, $m\vec{v}+\vec{I}=m\vec{v}'$　が成り立つ。この関係を図にしていくと, 3 つのベクトルで描かれる図形は正三角形になるので, $I=mv=mv'$ となる。したがって,

$v'=v$, $I=mv$

【別解】

水平右向きに x 軸, 鉛直上向きに y 軸をとると, $\vec{I}=m\vec{v}'-m\vec{v}$ であるので,

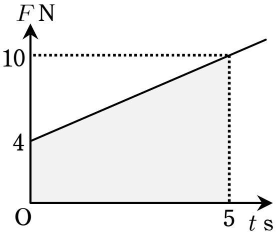
$$\begin{pmatrix}I\cos 120^\circ\\ I\sin 120^\circ\end{pmatrix}=m\begin{pmatrix}v'\cos 60^\circ\\ v'\sin 60^\circ\end{pmatrix}-m\begin{pmatrix}v\\ 0\end{pmatrix}$$ より,

$$\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}I\\ \frac{\sqrt{3}}{2}I\end{pmatrix}=m\begin{pmatrix}\frac{1}{2}v'-v\\ \frac{\sqrt{3}}{2}v'\end{pmatrix}$$ これを解くと,

$v'=v$, $I=mv$

100 (1) 35 N·s (2) 15 m/s

【解説】



(1) $t=0$〜5.0 の間に物体が受ける力積の大きさは図に示す面積に相当するので，その大きさは，

$$\frac{(4+10)\times5}{2}=35\,\mathrm{N\cdot s}$$

(2) 受けた力積は運動量の変化に相当するので，求める速さを v とおくと，

$$35=5.0v-5.0\times8.0$$

よって，$v=15$ m/s

101 分裂前の物体の速さ:8.5 m/s

分裂後の A の速さ:15 m/s

【解説】

分裂前後では外から力が加わっていないので運動量は保存される。分裂前の物体の速度を $\vec{v}$，分裂後の A の速さを v_A とし，東向きに x 軸，北向きに y 軸をとると，運動量保存則より，

$$5.0\vec{v}=2.0\begin{pmatrix}0\\v_A\end{pmatrix}+3.0\begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30\\2.0v_A\end{pmatrix}$$

よって，$\vec{v}=\dfrac{1}{5.0}\begin{pmatrix}30\\2.0v_A\end{pmatrix}$ …①

この速度は北東向きであるので，x 成分，y 成分が等しくなければいけない。よって，$30=2.0v_A$ より，$v_A=15\,\mathrm{m/s}$ これを①に代入すると，

$$\vec{v}=\frac{1}{5.0}\begin{pmatrix}30\\30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\6\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

よって，

$$|\vec{v}|=6\sqrt{1^2+1^2}=6\sqrt{2}\fallingdotseq8.46\fallingdotseq8.5\text{ m/s}$$

102 (1) $v_A=8.0\,\mathrm{m/s}$，$v_B=5.0\,\mathrm{m/s}$

(2) 9.0 J

【解説】

(1) はねかえり係数と速度の関係より，

$$0.5=-\frac{v_A-v_B}{2.0-8.0}=\frac{v_A-v_B}{6.0}$$ よって，

$v_A-v_B=3.0$ …①

運動量保存則より，

$$1.0\times2.0+2.0\times8.0=1.0v_A+2.0v_B$$

よって，$v_A+2.0v_B=18$ …② ①,②を解くと，$v_A=8.0\,\mathrm{m/s}$，$v_B=5.0\,\mathrm{m/s}$

(2) 後の運動エネルギーの総和− 前の運動エネルギーの総和 を計算すると，

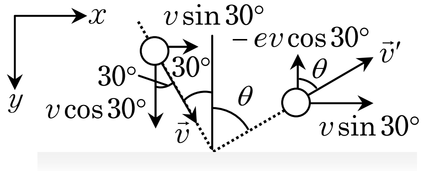
$$\frac{1}{2}\times1.0\times8.0^2+\frac{1}{2}\times2.0\times5.0^2$$

$$-\left(\frac{1}{2}\times1.0\times2.0^2+\frac{1}{2}\times2.0\times8.0^2\right)=-9.0\,\mathrm{J}$$

よって，運動エネルギーの総和は 9.0 J 減少したことになる。

103 (1) 30° (2) 90° (3) 0.33

【解説】



衝突前後の速度をそれぞれ $\vec{v},\vec{v}'$ とし，床にはねかえる前の小球の速さを v とするとき，

図より，$\vec{v}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}v\\\frac{\sqrt{3}}{2}v\end{pmatrix}$，$\vec{v}'=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}v\\-\frac{\sqrt{3}}{2}ev\end{pmatrix}$

(1) $e=1$ なので，$\vec{v}'=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}v\\-\frac{\sqrt{3}}{2}v\end{pmatrix}$ はねかえる前と比べて x 成分は同じで，y 成分は符号が変わっただけなので，$\theta=30°$ となる。

※ $\tan\theta=\dfrac{\frac{1}{2}v}{\frac{\sqrt{3}}{2}v}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より，$\theta=30°$

(2) $e=0$ なので，$\vec{v}'=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}v\\0\end{pmatrix}$ y 成分が 0 なので，小球は床と衝突後，床と接触したまま移動したことになる。よって，$\theta=90°$ となる。

※ $\tan\theta=\dfrac{\frac{1}{2}v}{0}=\infty$ より，$\theta=90°$ と求められる。

(3) $\vec{v}'=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}v\\-\frac{\sqrt{3}}{2}ev\end{pmatrix}$ で，$\theta=60°$ より，

$$\tan 60^\circ = \frac{\frac{1}{2}v}{\frac{\sqrt{3}}{2}ev} = \frac{1}{\sqrt{3}e} \quad \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

より, e について解くと, $e = \dfrac{1}{3} \fallingdotseq 0.33$

104 (1) $v = \dfrac{(2m-M)v_0}{2(m+M)}$, $V = \dfrac{3mv_0}{2(m+M)}$

(2) $\dfrac{3mv_0}{2(m+M)}\sqrt{\dfrac{M}{k}}$

【解説】

(1) 衝突前後で運動量は保存されるので,
$mv_0 = mv + MV \cdots①$　はねかえり係数と速さの関係より, $\dfrac{1}{2} = -\dfrac{v-V}{v_0-0} \cdots②$

①,②より, $v = \dfrac{(2m-M)v_0}{2(m+M)}$, $V = \dfrac{3mv_0}{2(m+M)}$

(2) 小球と板が衝突した直後からばねが最も縮む間, 外力は板に対して仕事をしていないので, 力学的エネルギーは保存される。よって, ばねの縮みの最大値を x とすると,

$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

となり, これを x について解くと,

$$x = V\sqrt{\frac{M}{k}} = \frac{3mv_0}{2(m+M)}\sqrt{\frac{M}{k}}$$

105 (1) 5.6 m/s　(2)　45°

【解説】

(1) 衝突前の A, B の速度ベクトルを $\vec{v}_{\mathrm{A}}$, $\vec{v}_{\mathrm{B}}$, 衝突後の速度ベクトルを $\vec{v}'_{\mathrm{A}}$, $\vec{v}'_{\mathrm{B}}$ とすると,

$\vec{v}_{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} 2.0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6.0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}'_{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.0 \end{pmatrix}$ となり,

$\vec{v}'_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$　とすると, 運動量保存則より,

$$0.20\vec{v}_{\mathrm{A}} + 0.10\vec{v}_{\mathrm{B}} = 0.20\vec{v}'_{\mathrm{A}} + 0.10\vec{v}'_{\mathrm{B}}$$

$$0.20\begin{pmatrix} 2.0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.10\begin{pmatrix} 0 \\ 6.0 \end{pmatrix} = 0.20\begin{pmatrix} 0 \\ 1.0 \end{pmatrix} + 0.10\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \end{pmatrix} + 0.10\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

$$0.10\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

$0.10\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.4 \end{pmatrix}$　両辺を 10 倍して,

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.0 \\ 4.0 \end{pmatrix}$$

よって, $|\vec{v}'_{\mathrm{B}}| = \sqrt{4.0^2 + 4.0^2} = 4\sqrt{2} \fallingdotseq 5.6$

(2) $\tan\theta = \dfrac{v_y}{v_x} = \dfrac{4.0}{4.0} = 1$　よって, $\theta = 45^\circ$

106 (1) $e\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$　(2) $2ev_0\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$　(3) e^2h

(4) $2e^nv_0\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$　(5) $e^{2n}h$

【解説】

速度は水平右向き, 鉛直上向きを正とする。

(1) 小球が A_1 で衝突する直前の速度の鉛直成分を v とする。P_0 で打ち出すときの小球の速度の鉛直成分は 0 であるので, 公式より $v^2 - 0^2 = 2gh$　となり $v = -\sqrt{2gh}$　となる。よって, A_1 で衝突する直後の小球の速度の鉛直成分は $e\sqrt{2gh}$ となる。A_1 ではねかえってから t s 後の速度の鉛直成分を v_y とすると, $v_y = e\sqrt{2gh} - gt$　となり, 最高点 P_1 に達するとき, $v_y = 0$ であるので, このとき,

$0 = e\sqrt{2gh} - gt$　となり, t について解くと,

$t = \dfrac{e\sqrt{2gh}}{g} = e\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ となる。

(2) 床はなめらかであるので, 小球が床ではねかえっても速度の水平成分は, 常に v_0 である。A_1 から A_2 に達するまでの時間は, (1) で求めた時間の 2 倍, つまり $2e\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ かかるので,

$\mathrm{A_1A_2} = v_0 \times 2e\sqrt{\dfrac{2h}{g}} = 2ev_0\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$　となる。

(3) A_1 ではねかえった後の速度の鉛直成分は $e\sqrt{2gh}$, P_1 に達したときの速度の鉛直成分は 0 であるので, 公式より,

$$0^2 - (e\sqrt{2gh})^2 = 2\cdot(-g)h_1$$

よって, $h_1 = \dfrac{(e\sqrt{2gh})^2}{2g} = \dfrac{e^2\cdot 2gh}{2g} = e^2h$

(4) 1 回目に衝突した直後の小球の速度の鉛直

成分は$e\sqrt{2gh}$, 2 回目に衝突した直後の小球の速度の鉛直成分は$e^2\sqrt{2gh}$, 3 回目に衝突した直後の小球の速度の鉛直成分は$e^3\sqrt{2gh}$ …となるので, n 回目に衝突した直後の小球の速度の鉛直成分は$e^n\sqrt{2gh}$ となる。A_n ではねかえってから t s 後の速度の鉛直成分をV_yとすると, $V_y=e^n\sqrt{2gh}-gt$ となり, はねかえってから最高点に達するとき, $V_y=0$ となるので, このとき, $0=e^n\sqrt{2gh}-gt$ となり, t について解くと, $t=e^n\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ となる。A_n から A_{n+1} に達するまでの時間は, この 2 倍の$2e^n\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ s であるので,

$$\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}=v_0\times 2e^n\sqrt{\frac{2h}{g}}=2e^nv_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

(5) n 回目に衝突した直後の小球の速度の鉛直成分は$e^n\sqrt{2gh}$ で, はねかえって最高点P_nに達したときの小球の速度の鉛直成分は0であるので, 公式より,

$0^2-(e^n\sqrt{2gh})^2=2\cdot(-g)h_n$ h_n について解くと,

$$h_n=\frac{(e^n\sqrt{2gh})^2}{2g}=\frac{e^{2n}\cdot 2gh}{2g}=e^{2n}h$$

107 ア. $-R$ イ. $\dfrac{R}{m}$ ウ. $\dfrac{R}{M}$

エ, オ. m , M (順不同) カ. mv_0 キ.運動量

ク. $\dfrac{mv_0}{m+M}$ ケ.0

コ. 力学的エネルギー(運動エネルギー)

【解説】

ブロックが弾丸から受ける摩擦力が R のとき, 作用·反作用の法則によって弾丸がブロックから受ける摩擦力は$-R$ となる。弾丸が摩擦力を受けているときの弾丸とブロックの加速度をそれぞれ a, A とすると, 弾丸とブロックの運動方程式はそれぞれ次のようになる。

弾丸: $ma=-R$ ブロック: $MA=R$

よって, $a=-\dfrac{R}{m}$, $A=\dfrac{R}{M}$ となり, 時刻 t $(0\leqq t\leqq \Delta t)$ でのそれぞれの速度は,

弾丸: $v=v_0-\dfrac{R}{m}t$ ブロック: $v=\dfrac{R}{M}t$

時刻$t=\Delta t$ のとき, $v=u$ であるので,

$u=v_0-\dfrac{R}{m}\Delta t$ …① $u=\dfrac{R}{M}\Delta t$ …②

①×m: $mu=mv_0-R\Delta t$

②×M: $Mu=R\Delta t$

これらの辺々を加えると, $mu+Mu=mv_0$

よって, 運動量保存則が成り立つことがわかる。

跳ね返り係数は,

$$e=-\frac{v'_\mathrm{A}-v'_\mathrm{B}}{v_\mathrm{A}-v_\mathrm{B}}=-\frac{u-u}{v_0-0}=0$$

つまり, 完全非弾性衝突となり, 力学的エネルギーの和は保存されない。

108

度	30°	45°	60°	90°	180°	360°
rad	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	π	2π

109 (1) ① 2π ② $r\theta$

(2) $\dfrac{r^2\theta}{2}$ (3) $S=\dfrac{1}{2}\ell r$

【解説】

360° = 2π rad であることに注意する。

(1) 弧の長さ = 円周 × $\dfrac{\text{中心角}}{360°}$ より,

$$\ell=2\pi r\times\frac{\theta}{2\pi}=r\theta$$

(2) 扇形の面積 = 円の面積 × $\dfrac{\text{中心角}}{360°}$ より,

$$S=\pi r^2\times\frac{\theta}{2\pi}=\frac{r^2\theta}{2}$$

(3) (1) より$\theta=\dfrac{\ell}{r}$ これを(2) の式に代入すると, $S=\dfrac{r^2\theta}{2}=\dfrac{r^2}{2}\times\dfrac{\ell}{r}=\dfrac{1}{2}\ell r$

110 $\dfrac{2}{3}\pi$ rad

【解説】

扇形の中心角を θ rad, 半径を r, 弧の長さを ℓ とすると, $\ell = r\theta$ となるので, $\dfrac{4}{3}\pi = 2\theta$ 　これを解くと, $\theta = \dfrac{2}{3}\pi$

111 (1) $v = r\omega$ (2) $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ (3) $\ell = r\omega t$

(4) $\omega = 2\pi n$

【解説】

(1) (弧の長さ)＝(半径)×(中心角) であるので,
周期を T' とすると,

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{2k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = T$$

よって, T' は T の 1 倍

(1 秒あたりに描く弧の長さ)＝(半径)×(1 秒あたりに進む中心角)で求められる。

よって, $v = r\omega$

(2) $1\text{周するのにかかる時間} = \dfrac{1\text{周分の角}}{\text{角速度}}$

なので, $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

(3) 中心角が θ rad, 半径が r m の扇形の弧の長さは $r\theta$ m である。この場合, 角は t 秒間に ωt rad 進むので, これを中心角とした扇形の弧の長さは $r\omega t$ となる。

(4) $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ より, $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ …①

また, $n = \dfrac{1}{T}$ …② 　であるので, ①,②より T を消去して, $\omega = 2\pi n$

112 $n = 2.0$ Hz, 　$T = 0.50$ s,
$\omega = 1.3 \times 10$ rad/s, 　$v = 6.3$ m/s

【解説】

回転数は 1 秒あたりに回転する数なので,
$n = 8$ 回転 $\div 4.0$ s $= 2.0$ Hz

周期は 1 回転にかかる時間なので,

$T = 4.0$ s $\div 8$ 回転 $= 0.50$ s 　$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ より,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \times 3.14}{0.5} = 12.56 \fallingdotseq 1.3 \times 10 \text{ rad/s}$$

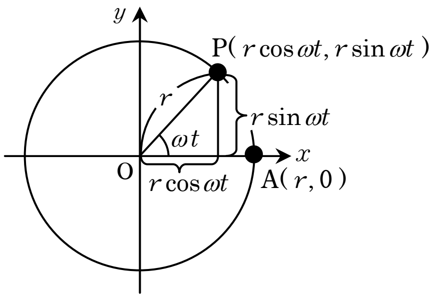
$$v = r\omega = 0.5 \times 12.56 = 6.28 \fallingdotseq 6.3 \text{ m/s}$$

113 (1) ωt 　(2) $(r\cos\omega t, r\sin\omega t)$

(3) $r\omega$

(4) $\dfrac{2\pi}{\omega}$

(5) $\dfrac{\omega}{2\pi}$



114 (1) $y' = -\cos x$ 　(2) $y' = -3\sin x$

(3) $y' = -7\cos(-7x)$

(4) $y' = 2\sin(-2x+1)$

【解説】

(1) $y' = (-\sin x)' = -\cos x$

(2) $y' = (3\cos x)' = -3\sin x$

(3) $y' = \{\sin(-7x)\}' = -7\cos(-7x)$

(4) $y' = \{\cos(-2x+1)\}'$
$= -2\{-\sin(-2x+1)\} = 2\sin(-2x+1)$

115 (1) -11 　(2) 32

【解説】

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\times(-3) + (-1)\times 5 = -11$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = -2\times 5 + (-6)\times(-7) = 32$

116 (1) $\dfrac{\pi}{2}$ 　(2) $\dfrac{\pi}{3}$ 　(3) $\dfrac{3}{4}\pi$ 　(4) π

【解説】

(1) $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\times 2 + (-1)\times 4 = 0$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

より, $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{0}{\sqrt{5}\times 2\sqrt{5}} = 0$

よって, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

(2) $|\vec{a}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$

$|\vec{b}| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \sqrt{3}\times 0 + 1\times 2 = 2$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

より, $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{2}{2\times 2}=\dfrac{1}{2}$

よって, $\theta=\dfrac{\pi}{3}$

(3) $|\vec{a}|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$

$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times 1+(-3)\times 2=-5$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

より, $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-5}{\sqrt{10}\times\sqrt{5}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって, $\theta=\dfrac{3}{4}\pi$

(4) $|\vec{a}|=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$

$|\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times(-1)+4\times(-2)=-10$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ より,

$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-10}{2\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=-1$

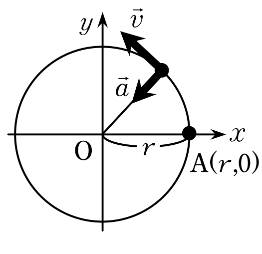
よって, $\theta=\pi$

117

(1) $\vec{p}=r\begin{pmatrix}\cos\omega t\\ \sin\omega t\end{pmatrix}$

$\vec{v}=r\omega\begin{pmatrix}-\sin\omega t\\ \cos\omega t\end{pmatrix}$

$\vec{a}=-r\omega^2\begin{pmatrix}\cos\omega t\\ \sin\omega t\end{pmatrix}$



(2) $v=r\omega\quad a=r\omega^2$ (3) $a=\dfrac{v^2}{r}$

118 $\omega=2\pi n$, $v=2\pi nr$, $a=4\pi^2n^2r$

【解説】

周期を T とすると, $n=\dfrac{1}{T}$ となるので,

$\omega=\dfrac{2\pi}{T}=2\pi n$, $v=r\omega=2\pi nr$,

$a=r\omega^2=r(2\pi n)^2=4\pi^2n^2r$

119 $a=47\ \mathrm{m/s^2}$ $S=9.5\ \mathrm{N}$

【解説】

質量:$m=0.20\ \mathrm{kg}$ 半径:$r=0.30\ \mathrm{m}$

周期:T 回転数:$n=2.0\ \mathrm{Hz}$ とすると,

$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$,$n=\dfrac{1}{T}$ より T を消去して,

$\omega=2\pi n=2\times 3.14\times 2.0=12.56$

$a=r\omega^2=0.30\times 12.56^2\fallingdotseq 47\ \mathrm{m/s^2}$

中心方向の運動方程式は $mr\omega^2=S$ となるので,

$0.20\times 0.30\times 12.56^2=S$ よって $S\fallingdotseq 9.5\ \mathrm{N}$

120 (1) 周期: $\dfrac{2\pi}{\omega}$ 回転数: $\dfrac{\omega}{2\pi}$

速さ: $(L+x)\omega$ (2) $m(L+x)\omega^2$

(3) $\dfrac{m(L+x)\omega^2}{x}$

【解説】

(1) 周期は $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ より 回転数は,

$n=\dfrac{1}{T}=\dfrac{\omega}{2\pi}$

おもりの円軌道の半径を r とすると, $r=L+x$ であるので, おもりの速さは $v=r\omega=(L+x)\omega$

(2) 向心力は $mr\omega^2$ で, $r=L+x$ より, $m(L+x)\omega^2$ となる。

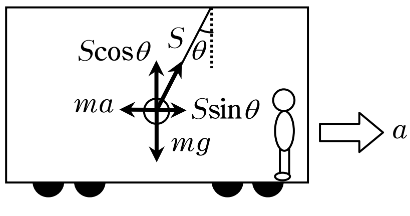
(3) ばね定数を k とすると, 円の中心方向の運動方程式は(2)より, $m(L+x)\omega^2=kx$

これを k について解くと, $k=\dfrac{m(L+x)\omega^2}{x}$

121 (1) $S=m\sqrt{a^2+g^2}$ (2) $\tan\theta=\dfrac{a}{g}$

(3) $v_x=at,\ v_y=gt$ (4) $x=\dfrac{ah}{g}$

【解説】



(1) 非慣性系でつり合いの式を立てると,

水平方向: $m\cdot 0=S\sin\theta-ma\cdots$①

鉛直方向: $m\cdot 0=S\cos\theta-mg\cdots$②

①式より $S\sin\theta=ma\cdots$③

②式より $S\cos\theta=mg\cdots$④

③^2＋④^{2}より,

$S^2\sin^2\theta + S^2\cos^2\theta = m^2a^2 + m^2g^2$

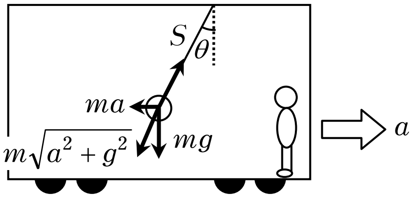
$S^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = m^2(a^2 + g^2)$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より,

$S^2 = m^2(a^2 + g^2)$ よって,

$S = m\sqrt{a^2 + g^2}$

【別解】



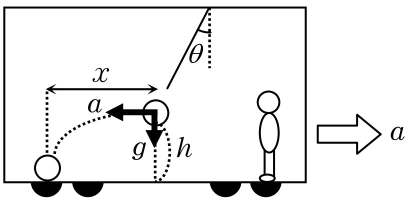
重力と慣性力を合成すると三平方の定理より, $m\sqrt{a^2+g^2}$ となり, これが糸の張力とつり合って, いるので $S = m\sqrt{a^2+g^2}$

(2) ③,④式の辺々を割ると, $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{a}{g}$

よって, $\tan\theta = \dfrac{a}{g}$

(3) 糸を切った後の加速度は鉛直下向きに g, 水平方向には a であるので,

$v_x = at,\ v_y = gt$

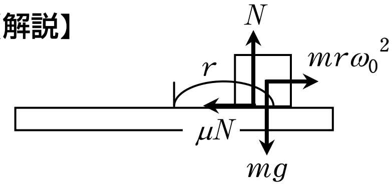


(4) 糸を切ってから t 秒後の鉛直方向の移動距離は $\dfrac{1}{2}gt^2$ なので, これが h と等しくなると, $\dfrac{1}{2}gt^2 = h$ つまり, $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ …① でおもりは床と接触する。糸を切ってから t 秒後の水平距離は $\dfrac{1}{2}at^2$ であるので, ①式より,

$$x = \frac{1}{2}a\left(\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^2 = \frac{ah}{g}$$

122 $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{\mu g}{r}}$

【解説】



非慣性系で考える。円盤からの垂直抗力を N とすると, 鉛直方向のつり合いの式は,

$N = mg$ …①

また, 物体がすべりだすのは遠心力と最大静止摩擦力がつり合ったときであり, そのときの円盤の角速度は ω_0 であるので, このときの水平方向の釣り合いの式は, $mr\omega_0{}^2 = \mu N$ …②

①,②より, N を消去すると, $mr\omega_0{}^2 = \mu mg$

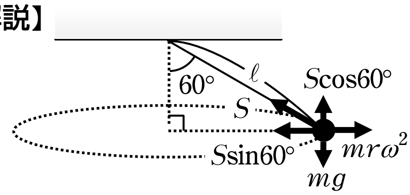
よって, $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{\mu g}{r}}$

123 (1) $S = 2mg$ (2) $\omega = \sqrt{\dfrac{2g}{\ell}}$

(3) $v = \sqrt{\dfrac{3g\ell}{2}}$ (4) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{2g}}$

【解説】

(1)



図より鉛直方向のつり合いの式を立てると,

$S\cos60° = mg$ $S \times \dfrac{1}{2} = mg$ よって,

$S = 2mg$

(2) 図より非慣性系で水平方向のつり合いの式を立てると, $S\sin60° = mr\omega^2$

(1) より $S = 2mg$, また $r = \ell\sin60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\ell$ より,

$2mg\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = m\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\ell\cdot\omega^2$ よって, $\omega = \sqrt{\dfrac{2g}{\ell}}$

(3) 等速円運動であるので, $v = r\omega$ が成り立つので, (2) の結果より,

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell\cdot\sqrt{\frac{2g}{\ell}} = \sqrt{\frac{3\ell^2}{4}}\cdot\sqrt{\frac{2g}{\ell}} = \sqrt{\frac{3g\ell}{2}}$$

(4) (2)の結果を利用して, $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{2g}}$

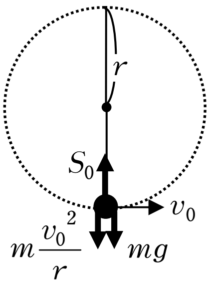
124 (1) $S_0 = m\left(\dfrac{{v_0}^2}{r} + g\right)$

(2) $\sqrt{{v_0}^2 - 4gr}$ (3) $S = \dfrac{m({v_0}^2 - 5gr)}{r}$

(4) $v_0 \geqq \sqrt{5gr}$

【解説】

(1) 小球に初速 v_0 が与えられた直後から円運動を始める。非慣性系で考えると，小球の速さが v_0 になった直後，図のように糸の張力 S_0 と，遠心力 $m\dfrac{v_0^2}{r}$ と重力 mg の和がつり合っているので，



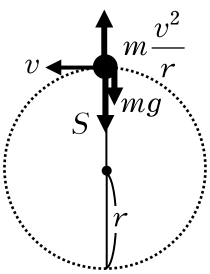
$$S_0 = m\frac{{v_0}^2}{r} + mg = m\left(\frac{{v_0}^2}{r} + g\right)$$

(2) 小球に初速が与えられてから最高点に達するまでの間で，力学的エネルギーは保存されるので，

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mg\cdot 2r \quad \text{よって，}$$

$$v = \sqrt{{v_0}^2 - 4gr}$$

(3) 小球の最高点での速さを v とすると最高点に達したときの遠心力は $m\dfrac{v^2}{r}$ で，これと，重力 mg と糸の張力 S との和がつり合っているので，



$$S + mg = m\frac{v^2}{r} \quad \text{よって，} S = m\frac{v^2}{r} - mg$$

となる。(2)の $v = \sqrt{{v_0}^2 - 4gr}$ を代入して，

$$S = \frac{m({v_0}^2 - 4gr)}{r} - mg = \frac{m({v_0}^2 - 5gr)}{r}$$

(4) 最高点に達するための条件は，(2)より，

$$v = \sqrt{{v_0}^2 - 4gr} > 0 \quad \text{よって，}$$

$$v_0 > 2\sqrt{gr} \cdots ①$$

また，糸の張力が一番小さくなる最高点で，糸の張力が 0 以上になればいいので，(3) より，

$$S = \frac{m({v_0}^2 - 5gr)}{r} \geqq 0 \quad \text{これを解くと，}$$

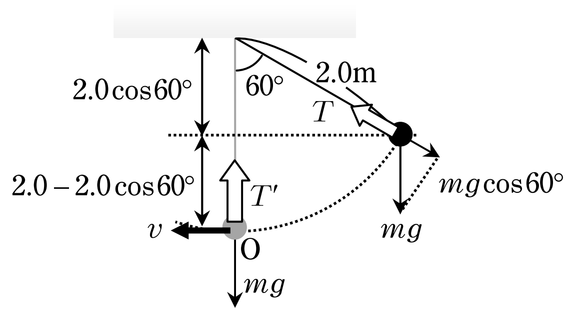
$$v_0 \geqq \sqrt{5gr} \cdots ② \quad \text{①かつ②より，}$$

$$v_0 \geqq \sqrt{5gr}$$

125 (1) 4.9 N (2) 4.4 m/s (3) 20 N

【解説】

初めの糸の張力を T，最下点での糸の張力を T'，おもりの質量を m，重力加速度の大きさを g とする。



(1) 図より，非慣性系でつり合いの式を立てると，
$T = mg\cos 60°$ よって，

$$T = 1.0 \times 9.8 \times \frac{1}{2} = 4.9\ \text{N}$$

(2) 図より，初めの位置と最下点の鉛直方向の差は $2.0 - 2.0\cos 60° = 1.0$ となる。力学的エネルギーは前後で保存されるので，最下点でのおもりの速さを v とすると，

$$mg \times 1.0 = \frac{1}{2}mv^2$$

よって，$v = \sqrt{2g} = \sqrt{2 \times 9.8} \fallingdotseq 4.4\ \text{m/s}$

【注意】糸の張力はおもりの速度ベクトルと垂直なので，糸はおもりに対して仕事をしない。よって力学的エネルギーは保存されることに注意。

(3) 糸の長さを r として，最下点での円軌道の中心方向の運動方程式を慣性系で立てると，

$$m\frac{v^2}{r} = T' - mg \quad \text{よって，}$$

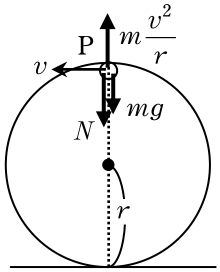
$$T' = m\frac{v^2}{r} + mg = 1.0 \times \frac{(\sqrt{2g})^2}{2.0} + 1.0g$$

$$= 2.0g = 2 \times 9.8 \fallingdotseq 20\ \text{N}$$

126 $m\left(\dfrac{v^2}{r}-g\right)$

【解説】

非慣性系で考えると，台車が最高点に達したとき，台車は遠心力 $m\dfrac{v^2}{r}$ を受け，この遠心力と，重力(mg) と垂直抗力(N) との和がつり合っているので，

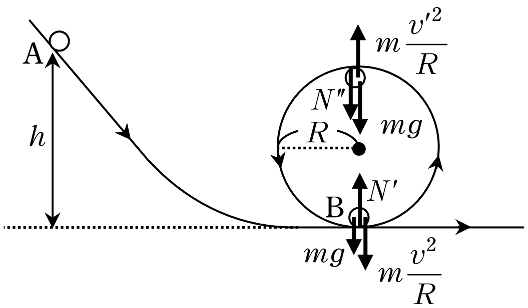


$m\dfrac{v^2}{r}=mg+N$　よって，$N=m\left(\dfrac{v^2}{r}-g\right)$

127

(1) 直前:mg　直後:$mg\left(1+\dfrac{2h}{R}\right)$　(2) $\dfrac{5}{2}R$

【解説】



(1) 円軌道に入る直前の抗力を N，直後を N' とすると，円軌道に入る直前は遠心力を受けないので，つり合いの式より　$N=mg$　円軌道に入る直後は，遠心力を受けるので，このときの速さを v とすると，

$N'=mg+m\dfrac{v^2}{R}\cdots$①

またエネルギー保存則より $mgh=\dfrac{1}{2}mv^2$

よって，$v=\sqrt{2gh}$　これを①式に代入して，

$N'=mg+m\dfrac{2gh}{R}=mg\left(1+\dfrac{2h}{R}\right)$

(2) 小球が最高点に達したときの速さを v' とする。エネルギー保存則より，

$mgh=\dfrac{1}{2}mv'^2+mg\cdot 2R$

よって，$v'=\sqrt{2g(h-2R)}\cdots$①

また最高点に達したときの抗力を N'' とすると，つり合いの式より，$N''+mg=m\dfrac{v'^2}{R}$　よって，$N''=m\left(\dfrac{v'^2}{R}-g\right)$　小球が落ちないためには $N''\geqq 0$ となればよいので，

$N''=m\left(\dfrac{v'^2}{R}-g\right)\geqq 0$　よって，

$v'^2\geqq gR$　①式より v' を消去すると，

$2g(h-2R)\geqq gR$　これを解くと，

$h\geqq\dfrac{5}{2}R$

128 (1) 0.25 1/s　(2) 1.6 rad/s　(3) 3.1 m/s　(4) 4.9 m/s^2　(5) 9.9 N

【解説】

(1) 4.0 s で 1 回転したので，周期 $T=4.0$ s

$n=\dfrac{1}{T}=\dfrac{1}{4.0}\fallingdotseq 0.25$ 1/s

(2) $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ より，$\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{2\pi}{4.0}\fallingdotseq 1.6$ rad/s

(3) $v=r\omega=2.0\cdot\dfrac{2\pi}{4.0}\fallingdotseq 3.1$ m/s

(4) $a=r\omega^2=2.0\cdot\left(\dfrac{2\pi}{4.0}\right)^2\fallingdotseq 4.9$ m/s^2

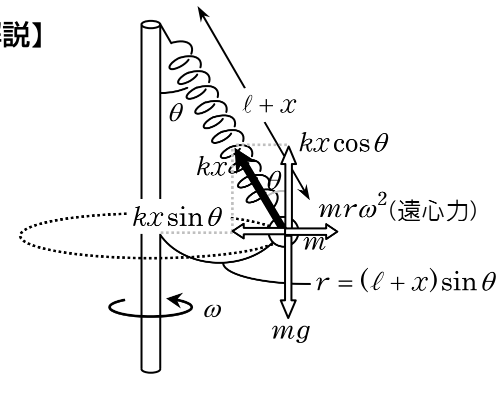
(5) $F=ma=2.0\cdot 2.0\cdot\left(\dfrac{2\pi}{4.0}\right)^2\fallingdotseq 9.9$ N

129 ア．$m\omega^2(\ell+x)\sin\theta$　イ．mg

ウ．$\dfrac{m\ell\omega^2}{k-m\omega^2}$　エ．$\dfrac{mg}{kx}$　オ．$\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

カ．$\dfrac{\pi}{2}$　キ．フック

【解説】



非慣性系でつり合いの式を立てると,

水平方向: $kx\sin\theta = m\omega^2(\ell + x)\sin\theta$ …①

鉛直方向: $kx\cos\theta = mg$ …②

①式を x について解くと $x = \dfrac{m\ell\omega^2}{k - m\omega^2}$

$k - m\omega^2 \to 0$ つまり $\omega \to \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ のとき,

$x = \dfrac{m\ell\omega^2}{k - m\omega^2} \to \infty$ となる。

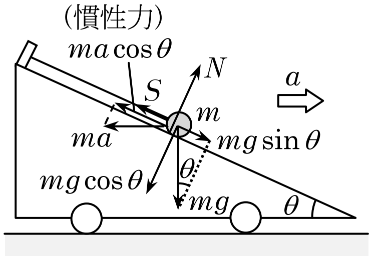
②式より $\cos\theta = \dfrac{mg}{kx}$

$x \to \infty$ ならば, $\cos\theta \to 0$

となるので, $\theta \to \dfrac{\pi}{2}$ となる。ばねの伸びが限界を超えるとフックの法則が成り立たなくなり,その後 ω を大きくしても軌道半径はほとんど変わらず小球は加速していく。

130 (1) $m(g\sin\theta - a\cos\theta)$ (2) $g\tan\theta$

【解説】



(1) 糸の張力を S, 物体が受ける垂直抗力を N とすると, 台車とともに運動する観測者の立場(非慣性系) で斜面方向のつり合いの式をたてると, 次のようになる。

$S + ma\cos\theta = mg\sin\theta$ …①

よって, $S = m(g\sin\theta - a\cos\theta)$

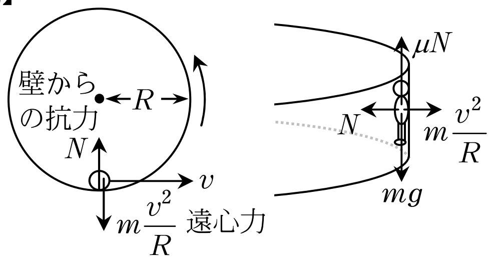
※平面上にいる観測者の立場(慣性系) で運動方程式をたててもよい。

(2) $a = a_0$ のとき糸の張力は 0 になるので, ①より $ma_0\cos\theta = mg\sin\theta$ よって,

$a_0 = \dfrac{g\sin\theta}{\cos\theta} = g\tan\theta$

131 (1) $4\pi^2 mn^2 R$ (2) $\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{\mu R}}$

【解説】



(1) 円筒形の部屋は単位時間あたりに n 回転するので, 1 回転するのにかかる時間は $\dfrac{1}{n}$ となる。よって人が回転する速さは,

$v = 2\pi R \div \dfrac{1}{n} = 2\pi nR$ 人が壁から受ける抗力を N として, 円運動をしている観測者の立場(非慣性系) でつり合いの式をたてると,

$m\dfrac{v^2}{R} = N$ よって,

$N = \dfrac{m}{R}v^2 = \dfrac{m}{R}(2\pi nR)^2 = 4\pi^2 mn^2 R$

(2) 最大静止摩擦力が重力以上になると人は下向きにすべらなくなるので, すべらなくなる条件は $\mu N \geqq mg$

(1) より, $N = 4\pi^2 mn^2 R$ なので,

$\mu(4\pi^2 mn^2 R) \geqq mg$

よって, $n \geqq \sqrt{\dfrac{g}{4\pi^2\mu R}} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{\mu R}}$

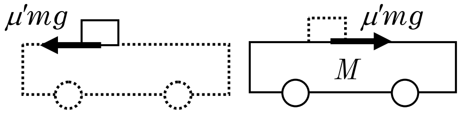
132 (1) $\dfrac{\mu' mg}{M}$ (2) $mb = -\mu' mg - m\dfrac{\mu' mg}{M}$

(3) $\dfrac{Mv_0}{\mu' g(M + m)}$ (4) $\dfrac{Mv_0^2}{2\mu' g(M + m)}$

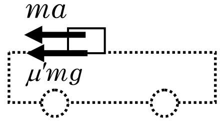
(5) $\dfrac{Mv_0}{M + m}$ (6) 保存される

(7) $e = 0$, 保存されない

【解説】



(1) 小物体が台車上をすべっているとき, 小物体は動摩擦力 $\mu' mg$ を左向きに受ける。よって台車は, 作用反作用の法則によって小物体から右向きに $\mu' mg$ の力を受ける。



台車が水平方向に受ける力はこれだけなので，台車の運動方程式を立てると，

$Ma = \mu' mg$　よって，$a = \dfrac{\mu' mg}{M}$

(2) 非慣性系で考えるので慣性力がはたらくことを考慮する。台車自体が右向きに a m/s^2 で加速しているので，小物体は左向きに動摩擦力 $\mu' mg$ と慣性力 ma を受ける。よって，

$mb = -\mu' mg - ma$　(1) より，

$a = \dfrac{\mu' mg}{M}$ であるので，

$mb = -\mu' mg - m\dfrac{\mu' mg}{M}$

(3) 小物体が台車上をすべり出してから t 秒後の小物体の速さを v とすると，台車に対する小物体の加速度は b m/s^2 であるので，

$v = v_0 + bt$

$v = 0$ のとき，$t = -\dfrac{v_0}{b}$ …①　(2) の運動方程式の両辺を m で割ると，

$b = -\mu' g - \dfrac{\mu' mg}{M}$ これを①式に代入して，

$$t = -\frac{v_0}{-\mu' g - \dfrac{\mu' mg}{M}} = -\frac{Mv_0}{-\mu' Mg - \mu' mg}$$

$$= \frac{Mv_0}{\mu' g(M+m)}$$

(4) 移動距離を x とすると，公式を用いて

$0^2 - {v_0}^2 = 2bx$ であるので，$x = -\dfrac{{v_0}^2}{2b}$　(2) より，$b = -\mu' g - \dfrac{\mu' mg}{M}$ であるので，

$$x = \frac{-{v_0}^2}{2\left(-\mu' g - \dfrac{\mu' mg}{M}\right)} = \frac{{v_0}^2}{2\left(\mu' g + \dfrac{\mu' mg}{M}\right)}$$

$$= \frac{M{v_0}^2}{2(\mu' Mg + \mu' mg)} = \frac{M{v_0}^2}{2\mu' g(M+m)}$$

(5) 小物体が台車に対して静止するまでの時間は(3) より，

$t = \dfrac{Mv_0}{\mu' g(M+m)}$ で，この時刻を過ぎれば台車は小物体から力を受けないので台車の加速度は 0 になる。小物体が台車上をすべり出してから t 秒後の台車の速さを V とすると，

$V = at$ となり，(1) より $a = \dfrac{\mu' mg}{M}$ なので，

$V = \dfrac{\mu' mg}{M}t$　ここで，$t = \dfrac{Mv_0}{\mu' g(M+m)}$

のとき，$V = \dfrac{\mu' mg}{M} \times \dfrac{Mv_0}{\mu' g(M+m)} = \dfrac{mv_0}{M+m}$

(6) 小物体が台車と接触する前の運動量(水平成分) の和は，

$mv_0 + M \cdot 0 = mv_0$ …①　小物体が台車上で静止し，一体となったときの運動量(水平成分) の和は，(5) の結果より，

$mV + MV = (m+M)V$

$= (m+M) \times \dfrac{mv_0}{m+M} = mv_0$ …②

①，②より，運動量の和は保存される。

【重要】 (6)の結果より，(5)は運動量の和が保存されることを利用して解くことができる。小物体が台車から受ける摩擦力と台車が小物体から受ける摩擦力は作用･反作用の関係にある。同様に，小物体が台車から受ける垂直抗力と台車が小物体から受ける垂直抗力も作用･反作用の関係にある。このように作用･反作用の関係にあり，互いに及ぼし合う力を**内力**といい，内力以外で外から力がはたらいていないとき，運動量の和は保存される。

(7) 公式 $e = -\dfrac{v'_A - v'_B}{v_A - v_B}$ より，$e = -\dfrac{V - V}{v_0 - 0} = 0$ となる。つまり完全非弾性衝突となり，運動エネルギーの総和は保存されない。※ $e = 1$ のときだけ運動エネルギーの総和は保存される。

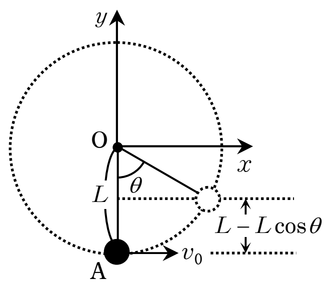
133 (1) $\sqrt{v_0^2 - 2gL(1-\cos\theta)}$

(2) $m\left\{\dfrac{v_0^2}{L} + g(3\cos\theta - 2)\right\}$

(3) $v_0 \geqq \sqrt{5gL}$　(4) $\sqrt{\dfrac{1}{2}gL}$

【解説】

(1)



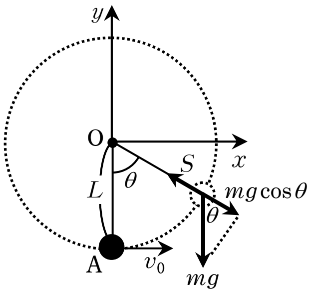
小球の速さを v として，小球が点 A にあるときを位置エネルギーの基準とすると，角 θ における小球の基準からの高さは $L-L\cos\theta$ であるので，力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv^2+mg(L-L\cos\theta)$$

これを v について解くと，

$$v=\sqrt{v_0^2-2gL(1-\cos\theta)}$$

(2)



小球の速さが v のときの中心方向の運動方程式は，$m\dfrac{v^2}{L}=S-mg\cos\theta$

これを S について解くと，

$S=m\dfrac{v^2}{L}+mg\cos\theta$ (1) より v を消去すると，

$$S=\frac{m}{L}\left\{v_0^2-2gL(1-\cos\theta)\right\}+mg\cos\theta$$

$$=\frac{m}{L}v_0^2-2mg(1-\cos\theta)+mg\cos\theta$$

$$=\frac{m}{L}v_0^2-2mg+3mg\cos\theta$$

$$=m\left(\frac{v_0^2}{L}-2g+3g\cos\theta\right)$$

$$=m\left\{\frac{v_0^2}{L}+g(3\cos\theta-2)\right\}$$

(3) $\theta=180°$ のとき糸の張力 S が 0 以上になればよいので，

$$S=m\left\{\frac{v_0^2}{L}+g(3\cos180°-2)\right\}\geqq 0$$

これを v_0 について解くと，$v_0\geqq\sqrt{5gL}$

(4) $\theta=120°$ のとき，(1)より，

$$v=\sqrt{v_0^2-2gL(1-\cos120°)}=\sqrt{v_0^2-3gL}$$

…①

また，このとき糸の張力 S が 0 になるので，(2)より，

$$S=m\left\{\frac{v_0^2}{L}+g(3\cos120°-2)\right\}$$

$$=m\left(\frac{v_0^2}{L}-\frac{7}{2}g\right)=0$$

よって，$v_0^2=\dfrac{7}{2}gL$　これを①に代入すると，

$$v=\sqrt{\frac{7}{2}gL-3gL}=\sqrt{\frac{1}{2}gL}$$

【別解】

中心方向の運動方程式：$m\dfrac{v^2}{L}=S-mg\cos\theta$

より，$S=0$，$\theta=120°$ を代入することで，

$v=\sqrt{\dfrac{1}{2}gL}$ と求められる。

134 (1) 運動：単振動　ω ：角振動数　A：振幅

(2) $\theta=-\dfrac{\pi}{2}$　(3) $v=A\omega\cos(\omega t+\theta)$

(4) $a=-A\omega^2\sin\left(\omega t-\dfrac{\pi}{2}\right)$　(5) $A\omega$

(6) $A\omega^2$　(7) $a=-\omega^2 x$　(8) $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$

(9) $\omega=2\pi f$

【解説】

(2) $t=0$ で $x=-A$ なので，

$$-A=A\sin(\omega\cdot0+\theta)$$

$\sin\theta=-1$　$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ に注意して，

$$\theta=-\frac{\pi}{2}$$

(3) $x=A\sin\left(\omega t-\dfrac{\pi}{2}\right)$ であるので，

$$v=\frac{dv}{dt}=A\omega\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$$

(4) $a=\dfrac{d^2x}{dt^2}=-A\omega^2\sin\left(\omega t-\dfrac{\pi}{2}\right)$

(5) $v=A\omega\cos\left(\omega t-\dfrac{\pi}{2}\right)$ で，

$-1 \leqq \cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right) \leqq 1$ であるので,

$-A\omega \leqq a \leqq A\omega$

(6) $a=-A\omega^2 \sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$ で,

$-1 \leqq \sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right) \leqq 1$ であるので,

$-A\omega^2 \leqq a \leqq A\omega^2$

(7) $x=A\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$

$a=-A\omega^2\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$ より,

$A\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$ を消去すると $a=-\omega^2 x$

(8) (9) $T=\frac{1}{f}=\frac{2\pi}{\omega}$ より, $T=\frac{2\pi}{\omega}$, $\omega=2\pi f$

135 (1) $-\omega^2 x$　(2) 左から $-\omega^2$,k

(3) $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$, $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

(4) $x=A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{\pi}{2}\right)$

【解説】

(1) 単振動の加速度は, $-\omega^2 x$ であることを暗記しておく。

(2) 単振動の運動方程式の立て方は,

$m(-\omega^2 x)=$ 外力の合計　と覚えておく。よって, 運動方程式は $m(-\omega^2 x)=-kx$

(3) (2)の運動方程式を ω について解くと,

$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ よって, 周期は

$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

(4) この運動の変位を $x=A\sin(\omega t+\theta)$ とすると, $t=0$ のとき $x=A$ であるので, この値を代入すると, $A=A\sin(\omega\cdot 0+\theta)$

よって, $\sin\theta=1$ より, $\theta=\frac{\pi}{2}$ 。$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ であるので, $x=A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{\pi}{2}\right)$

136 (1) $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$　(2) $\theta=\frac{\pi}{2}$

(3) $x=A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{\pi}{2}\right)$

$v=A\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{\pi}{2}\right)$

(4) $E=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2$

$$=\frac{1}{2}m\left\{A\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{\pi}{2}\right)\right\}^2+\frac{1}{2}k\left\{A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{\pi}{2}\right)\right\}^2$$

$$=\frac{1}{2}mA^2\frac{k}{m}\cos^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}kA^2\sin^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}kA^2\left\{\cos^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{\pi}{2}\right)+\sin^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}kA^2$$

k, A は定数なので E は一定である。

【解説】

(1) $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ は暗記しておくこと。

$\omega=\frac{2\pi}{T}$ であるので,

$\omega=2\pi\cdot\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{k}{m}}$

(2) $t=0$ で $x=A$ であるので,

$x=A\sin(\omega t+\theta)$ に代入すると,

$A=A\sin(\omega\cdot 0+\theta)$

よって, $\sin\theta=1$ となるので, $\theta=\frac{\pi}{2}$

(3) $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ であるので,

$x=A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{\pi}{2}\right)$

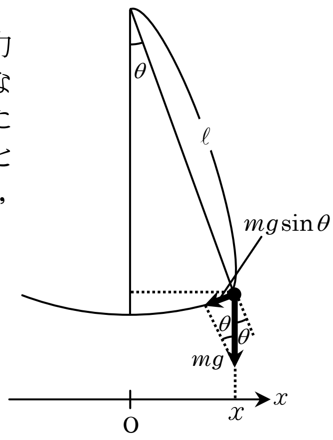
$$v = \frac{dx}{dt} = A\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

137 (1) ① $F = mg\sin\theta$　② $x = \ell\sin\theta$

③ $F = \dfrac{mg}{\ell}x$　(2) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$

【解説】

(1) ①図から，重力 mg を糸と垂直な方向に分解した力は $mg\sin\theta$ となる。よって，$F = mg\sin\theta$



② $\sin\theta = \dfrac{x}{\ell}$ であるので，$x = \ell\sin\theta$

③ $\sin\theta = \dfrac{x}{\ell}$

$F = mg\sin\theta$ より，$\sin\theta$ を消去すると，

$$F = mg\sin\theta = mg\frac{x}{\ell} = \frac{mg}{\ell}x$$

(2) 角振動数を ω とすると，単振動の運動方程式は，(1) より，$m(-\omega^2 x) = -\dfrac{mg}{\ell}x$　となり，これを ω について解くと，

$\omega = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$　となる。よって，$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$

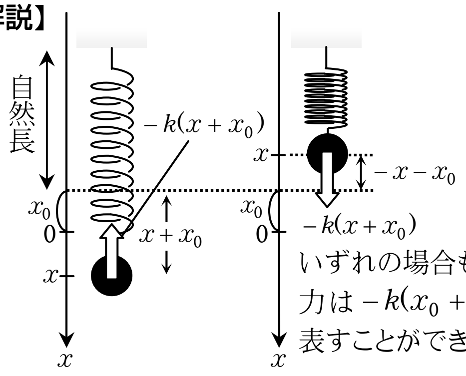
138 (1) $x_0 = \dfrac{mg}{k}$　(2) $x = A\sin\omega t$，

$v = A\omega\cos\omega t$，$a = -A\omega^2\sin\omega t$

(3) $a = -\omega^2 x$　(4) $F = -k(x + x_0)$

(5) $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$　(6) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

【解説】



いずれの場合も弾性力は $-k(x_0 + x)$ と表すことができる

(1) 物体が静止しているときのつり合いの式は

$mg = kx_0$　よって，$x_0 = \dfrac{mg}{k}$

(2) 原点が振動の中心となる。また $t = 0$ で $x = 0$ となり，このとき，速度は下向きであるので，$x = A\sin\omega t$

※このとき速度が上向きであれば，$x = -A\sin\omega t$ となる。

よって，$v = \dfrac{dx}{dt} = A\omega\cos\omega t$，

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\sin\omega t$$

(3) $x = A\sin\omega t$ と $a = -A\omega^2\sin\omega t$ より，$A\sin\omega t$ を消去して，$a = -\omega^2 x$

(4) 物体の変位が x のとき，ばねは自然長から $x + x_0$ だけ伸びている。下向きを正としているので，物体がばねから受ける力は $F = -k(x + x_0)$

(5) 運動方程式は次のようになる。

$m(-\omega^2 x) = -k(x + x_0) + mg$　(1)の

$x_0 = \dfrac{mg}{k}$ を代入すると，

$m(-\omega^2 x) = -k(x + \dfrac{mg}{k}) + mg$　式を整理して，$m(-\omega^2 x) = -kx$　よって，$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

(6) (5)より，$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ であるので，

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

139 (1) $\dfrac{mg}{k}$　(2) $A\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

(3) $V = \sqrt{\dfrac{k^2A^2 - m^2g^2}{mk}}$

【解説】

(1) このときのばねの伸びを x_0 とすると，つり合いの式は，$mg = kx_0$　よって，$x_0 = \dfrac{mg}{k}$

(2) 公式 $\dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}kX^2 =$ 一定　を利用する。物体がつり合いの位置を通過するときの速さを v とすると，この公式により，

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}k\cdot 0^2=\frac{1}{2}m\cdot 0^2+\frac{1}{2}kA^2$$

よって, $v=A\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

【別解】

つり合いの位置では速さが最大となる。ここで単振動の式は, $v=A\omega\cos(\omega t+\theta)$ と表すことができるので, $v\leqq A\omega$ つまり, v の最大値は $A\omega$ となる。周期は, $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ であるので, $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ よって, $A\omega=A\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

(3) ばねが自然長になるときの, 物体の速さを V とすると, 公式より,

$$\frac{1}{2}mV^2+\frac{1}{2}k{x_0}^2=\frac{1}{2}kA^2$$

$$\to\frac{1}{2}mV^2=\frac{1}{2}kA^2-\frac{1}{2}k{x_0}^2$$

$\to mV^2=kA^2-k{x_0}^2$　$x_0=\dfrac{mg}{k}$ を代入すると,

$$mV^2=kA^2-k\left(\frac{mg}{k}\right)^2=kA^2-\frac{m^2g^2}{k}$$

$=\dfrac{k^2A^2-m^2g^2}{k}$　両辺を m で割ると,

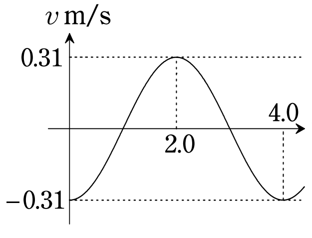
$V^2=\dfrac{k^2A^2-m^2g^2}{mk}$　よって,

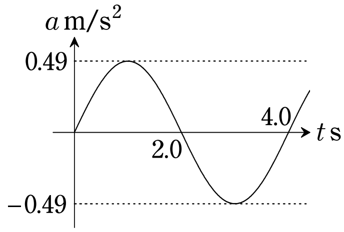
$$V=\sqrt{\frac{k^2A^2-m^2g^2}{mk}}$$

140 (1) $A=0.2\,\mathrm{m}$, $T=4.0\,\mathrm{s}$, $\omega=1.6\,\mathrm{rad/s}$

(2) $x=-0.2\sin\dfrac{\pi}{2}t$

(3)





【解説】

(1) 振幅と周期はグラフの目盛から読み取ると,
振幅: $A=0.2\,\mathrm{m}$, 周期: $T=4.0\,\mathrm{s}$

角振動数: $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{2\pi}{4.0}=\dfrac{\pi}{2}\fallingdotseq 1.6\,\mathrm{rad/s}$

(2) グラフは原点を通り, 原点から減少していることに注意すると,

$$x=-A\sin\omega t=-0.2\sin\frac{\pi}{2}t$$

(3) (2) の式から, v,a を求めると,

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-0.2\cdot\frac{1}{2}\pi\cos\frac{1}{2}\pi t$$

$$=-\frac{1}{10}\pi\cos\frac{1}{2}\pi t\quad\frac{1}{10}\pi\fallingdotseq 0.31$$

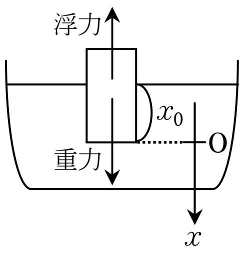
$$a=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\frac{1}{10}\pi\cdot\frac{1}{2}\pi\sin\frac{1}{10}\pi t$$

$$=\frac{1}{20}\pi^2\sin\frac{1}{10}\pi t$$

$$\frac{1}{20}\pi^2\fallingdotseq 0.49$$

141 (1) $\dfrac{M}{Sx_0}$　(2) $2\pi\sqrt{\dfrac{x_0}{g}}$

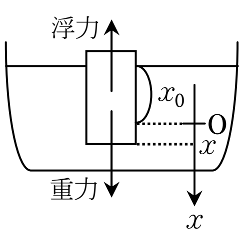
【解説】



(1) 物体が液体中で静止しているときのつり合いの式は,

$\rho Sx_0g=Mg$

よって, $\rho=\dfrac{M}{Sx_0}$



(2) つり合いの位置での物体の下端を原点として鉛直下向きに x 軸をとる。物体の下端の変位が x のときの運動方程式は角振動数を ω とすると,

$$M(-\omega^2x)=Mg-\rho S(x+x_0)g$$

(1) より$\rho=\dfrac{M}{Sx_0}$を代入すると,

$$M(-\omega^2x)=Mg-\frac{M}{Sx_0}S(x+x_0)g$$

式を整理すると,

$$M(-\omega^2x)=-\frac{Mg}{x_0}x\cdots(※)$$

ωについて解くと, $\omega=\sqrt{\dfrac{g}{x_0}}$

よって, $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{x_0}{g}}$

【別解】

この振動がばね定数kのばねによる振動であるとみなすと, (※) より, $-\dfrac{Mg}{x_0}x=-kx$

よって, $k=\dfrac{Mg}{x_0}$　となるので, 周期は,

$$T=2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{M}{Mg/x_0}}=2\pi\sqrt{\frac{x_0}{g}}$$

142 (1) $2k$　(2) $\dfrac{k}{2}$　(3) $\dfrac{2}{3}k$

【解説】

合成定数をKとする。

(1) ばね定数kのばねが2つ並列につながれているので, $K=k+k=2k$

(2) ばね定数kのばねが2つ直列につながれているので, $\dfrac{1}{K}=\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k}=\dfrac{2}{k}$　よって, $K=\dfrac{k}{2}$

(3) ばね定数$2k$, kのばねが直列につながれているので, $\dfrac{1}{K}=\dfrac{1}{2k}+\dfrac{1}{k}=\dfrac{3}{2k}$　よって,

$$K=\frac{2}{3}k$$

143 $9k$

【解説】

3等分したばねのばね定数をk_0とすると,

$$\frac{1}{k}=\frac{1}{k_0}+\frac{1}{k_0}+\frac{1}{k_0}=\frac{3}{k_0}\qquad k_0=3k$$

このばねを並列に3つつなげるときの合成ばね定数をKとすると, $K=3k+3k+3k=9k$

144 1.8 s

【解説】

糸の長さは$\ell=80\,\text{cm}=0.8\,\text{m}$であるので, 単振子の周期$T$は,

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}=2\times3.14\times\sqrt{\frac{0.8}{9.8}}=6.28\times\sqrt{\frac{4}{49}}$$

$$=6.28\times\frac{2}{7}=\frac{12.56}{7}\fallingdotseq1.8\,\text{s}$$

145 (1) $2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$　(2) 1倍　(3) $\dfrac{3}{2}k$

【解説】

(1) 結果は暗記しておくこと。

(2) 半分に切ったばねのばね定数をKとすると, $\dfrac{1}{k}=\dfrac{1}{K}+\dfrac{1}{K}$　より, $K=2k$

周期をT'とすると,

$$T'=2\pi\sqrt{\frac{2m}{2k}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=T$$

よって, T'はTの1倍

(3) このばねを3等分したときのばね定数をk_0とすると,

$$\frac{1}{k_0}+\frac{1}{k_0}+\frac{1}{k_0}=\frac{1}{k}\ \text{より,}\ k_0=3k$$

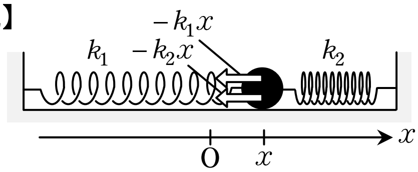
さらにこの3等分したばねを直列に2つつないだときのばね定数をKとすると,

$$\frac{1}{k_0}+\frac{1}{k_0}=\frac{1}{K}\quad\text{より,}\ K=\frac{k_0}{2}=\frac{3k}{2}=\frac{3}{2}k$$

146 (1) $2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1+k_2}}$　(2) $A\sqrt{\dfrac{k_1+k_2}{m}}$

【解説】

(1)



振動の中心を原点として, 水平右向きにx軸をとる。単振動の角振動数をωとして, 物体の変位がxのときの運動方程式を立てると,

$$m(-\omega^2x)=-k_1x-k_2x$$

つまり, $m(-\omega^2x)=-(k_1+k_2)x$　よって,

$$\omega=\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}\qquad T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}$$

(2) 物体が振動の中心にあるとき, ばねの弾性エネルギーが0となり, 運動エネルギーが最

大となる。振動の中心での物体の速さを v とすると，エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}k_1A^2+\frac{1}{2}k_2A^2=\frac{1}{2}mv^2$$ よって，

$$v=A\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$$

【別解】

振幅が A であるので，時刻 t での変位を

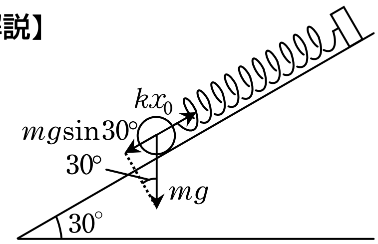
$x=A\sin(\omega t+\theta)$ とすると，$v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$

$$=A\omega\cos(\omega t+\theta)\leqq A\omega=A\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$$

147 (1) $\dfrac{mg}{2k}$　(2) $2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

【解説】

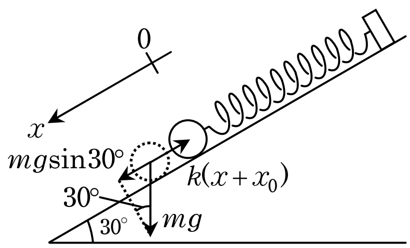
(1)



斜面方向の物体にはたらく力のつり合いの式は，$mg\sin 30°=kx_0$　よって，

$$x_0=\frac{1}{k}mg\sin 30°=\frac{mg}{2k}$$

(2)



つり合いの位置を原点として斜面下向きに x 軸をとる。小物体の変位が x のとき，単振動の角振動数を ω として，運動方程式を立てると，

$$m(-\omega^2x)=mg\sin 30°-k(x_0+x)$$

$$=\frac{1}{2}mg-kx_0-kx\quad x_0=\frac{mg}{2k}$$

より，$m(-\omega^2x)=\dfrac{1}{2}mg-k\cdot\dfrac{mg}{2k}-kx$

よって，$m(-\omega^2x)=-kx$

ω について解くと，$\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

よって，$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

148 (1)　$A=0.20\,\mathrm{m}$，$T=0.40\,\mathrm{s}$，

$$f=\frac{1}{T}=\frac{1}{0.40}=2.5\,\mathrm{Hz}$$

(2)　$v_{\max}=3.1\,\mathrm{m/s}$，$a_{\max}=49\,\mathrm{m/s^2}$

(3)　速度:エ　加速度:ウ

【解説】

(1)　グラフから読み取る。

(2)　角振動数を ω とすると，

$\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{2\pi}{0.40}=5\pi$ より，この単振動の変位の式は，$x=A\sin\omega t=0.20\sin 5\pi t$　よって，単振動の速度を v，加速度を a をとすると，

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=5\pi\cdot 0.20\cos 5\pi t=\pi\cos 5\pi t$$

$$a=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-5\pi^2\sin 5\pi t$$

$-1\leqq\cos 5\pi t\leqq 1$，$-1\leqq\sin 5\pi t\leqq 1$ であるので，$v_{\max}=\pi\fallingdotseq 3.1\,\mathrm{m/s}$

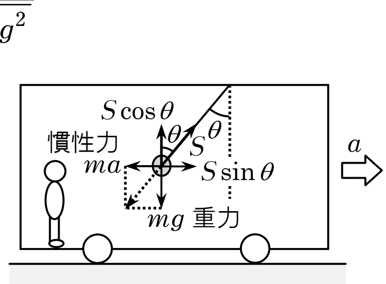
$a_{\max}=5\pi^2\fallingdotseq 49\,\mathrm{m/s^2}$

(3)　$v=\pi\cos 5\pi t$ は，$t=0$ で v が最大となる。よって，エと判断できる。$a=-5\pi^2\sin 5\pi t$ は，原点を通り，原点から負のほうへ変位する。よって，ウと判断できる。

149 (1)　$m\sqrt{a^2+g^2}$　(2)　$\tan\theta=\dfrac{a}{g}$

(3)　$2\pi\sqrt{\dfrac{L}{\sqrt{a^2+g^2}}}$

【解説】



(1)　図のように，おもりにはたらく重力 mg と慣性力 ma の合力が S とつり合っているので，

$$S=\sqrt{(ma)^2+(mg)^2}=m\sqrt{a^2+g^2}$$

(2)　水平方向と鉛直方向のつり合いの式を立てると，

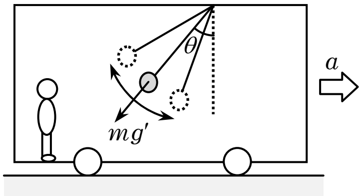
水平方向:$S\sin\theta=ma\cdots$①

鉛直方向:$S\cos\theta=mg\cdots$②

①÷②より, $\dfrac{S\sin\theta}{S\cos\theta}=\dfrac{ma}{mg}$ よって,

$\tan\theta=\dfrac{a}{g}$

(3)



(1)より, $S=m\sqrt{a^2+g^2}$ であるので, みかけの重力加速度の大きさを g' とすると,

$mg'=m\sqrt{a^2+g^2}$ よって,

$g'=\sqrt{a^2+g^2}$

よって, $T=2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g'}}=2\pi\sqrt{\dfrac{L}{\sqrt{a^2+g^2}}}$

150 (1) 運動量:保存される,
力学的エネルギー:保存されない

(2) $\dfrac{mv}{m+M}$ (3) 振幅: $\dfrac{mv}{\sqrt{k(m+M)}}$,

角振動数: $\sqrt{\dfrac{k}{m+M}}$

【解説】

(1) 運動量の総和は外力がはたらくと保存されないが, 弾丸が物体中を進んでいるときの互いに及ぼし合う摩擦力は内力であるので, 運動量の総和は保存される。(重力や垂直抗力は外力になるがその水平成分は 0 なので, 作用する力積も 0 である)一方, 摩擦が生じるときは摩擦熱が発生するため, 力学的エネルギーは保存されない。また, 力学的エネルギーが保存されるのは, はね返り係数が 1 である衝突のみであるが, この場合のはね返り係数は 0 であるので保存されない。はね返り係数が 0 である衝突を完全非弾性衝突という。

(2) 求める速さを V とすると, 運動量保存則より,
$mv=mV+MV$ よって,

$V=\dfrac{mv}{m+M}$

(3) ばねが最も縮んだときのばねの縮みが振幅であり, その縮みを A とする。弾丸と物体が一体となった直後からは非保存力がはたらかないので力学的エネルギーは保存される。よって,

$\dfrac{1}{2}(m+M)V^2=\dfrac{1}{2}kA^2$ (2)の結果より V を消去して A について解くと,

$A=\dfrac{mv}{\sqrt{k(m+M)}}$

また, 振動の周期の公式は $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ であり, この場合の質量は $m+M$ であるので,

$T=2\pi\sqrt{\dfrac{m+M}{k}}$ となる。一方, 角振動数を ω とすると, $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ であったので,

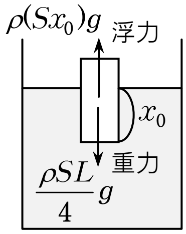
$\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{m+M}{k}}$ よって, $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m+M}}$

151 (1) $x_0=\dfrac{L}{4}$ (2) $T=\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$

(3) $v=\sqrt{2gL}$

【解説】

(1) 木片の質量は,

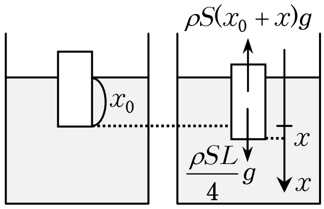


$\dfrac{\rho}{4}\times SL=\dfrac{\rho SL}{4}$ であり,
重力と浮力がつり合っているので,

$\dfrac{\rho SL}{4}g=\rho(Sx_0)g$

これを x_0 について解くと, $x_0=\dfrac{L}{4}$

(2) 図のようにつり合いの位置を原点として x 軸をとる。木片がつり合いの位置より距離 x だけ沈んでいるときの運動方程式は, 角振動数を ω とすると,



$\dfrac{\rho SL}{4}(-\omega^2x)=\dfrac{\rho SL}{4}g-\rho S(x_0+x)g$

$=\dfrac{\rho SL}{4}g-\rho S\left(\dfrac{L}{4}+x\right)g=-\rho Sgx$ …①

よって, $\omega=2\sqrt{\dfrac{g}{L}}$ であるので,

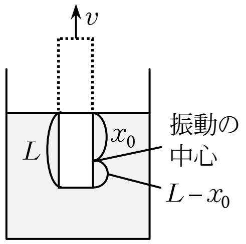
$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

【別解】

①をばね定数 k のばねの復元力と仮定すると，
$-\rho Sgx=-kx$　より，$k=\rho Sg$
よって，

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{\rho SL/4}{\rho Sg}}=\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

(3) 木片は単振動をするので，次の鉛直方向のばね振り子のエネルギー保存則を用いる。



公式：$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}k\mathrm{X}^2=$一定
(X:振動の中心からの距離)　よって，

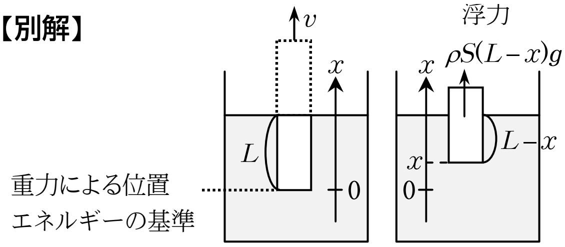
$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2+\frac{1}{2}k(L-x_0)^2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx_0^2$$

$x_0=\frac{L}{4}$，$m=\frac{\rho SL}{4}$，$k=\rho Sg$
であるので，

$$\frac{1}{2}(\rho Sg)(L-\frac{L}{4})^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{\rho SL}{4}v^2+\frac{1}{2}(\rho Sg)\left(\frac{L}{4}\right)^2$$

これを v について解くと，$v=\sqrt{2gL}$

【別解】



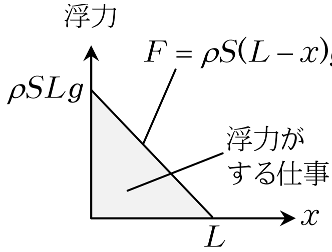
重力による位置エネルギーの基準を図のように木片を沈めたときの底面にする。x 軸を図のようにとると，木片の底面の座標が x のときの木片にはたらく浮力は $\rho S(L-x)g$ で，
(初めのエネルギー)＋浮力がする仕事＝(後のエネルギー)　であるので，

$$0+\int_0^L\rho S(L-x)g\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}mv^2+mgL$$

$m=\frac{\rho SL}{4}$ であるので，

$$\frac{1}{2}\rho SgL^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{\rho SL}{4}v^2+\frac{\rho SL}{4}gL$$

これを v について解くと，$v=\sqrt{2gL}$



152 ① 焦点　② 楕円　③ 面積　④ 2乗　⑤ 3乗

153 約165年

【解説】

地球の軌道半径を r とすると，海王星の軌道半径は $30r$ となる。ケプラーの第3法則より，$\frac{T^2}{a^3}=$一定 で，それぞれの焦点に位置する天体は太陽で一致するので，$\frac{1^2}{r^3}=\frac{T^2}{(30r)^3}$ が成り立つ。これを Tについて解くと，

$$T=\sqrt{30^3}=30\sqrt{30}=30\times 5.5=165$$

154 (1) Rv　(2) $2v$

【解説】

(1) $\frac{1}{2}\cdot 2Rv\sin 90^\circ=Rv$

(2) 点 P を通過するときの速さを u とすると，面積速度が一定なので，
$\frac{1}{2}\cdot Ru\sin 90^\circ=Rv$　よって $u=2v$

155 1.3×10^{-6} N

【解説】

互いに及ぼし合う力の大きさを Fとすると，

$$F=G\frac{Mm}{r^2}$$
$$=6.7\times 10^{-11}\times\frac{1.0\times 10^3\times 2.0\times 10^3}{10^2}$$
$$\fallingdotseq 1.3\times 10^{-6}$$

156 1.6×10^{-1}倍

【解説】

地球の質量を M, 半径を R とする。地表上の質量 m の物体にはたらく重力 mg が万有引力 $G\dfrac{Mm}{R^2}$ と等しくなるので, $mg = G\dfrac{Mm}{R^2}$

よって, $g = G\dfrac{M}{R^2}$ …①

月面上の質量 m の物体にはたらく重力 mg' は万有引力 $G\dfrac{(0.012M)m}{(0.27R)^2}$ と等しくなるので,

$$mg' = G\frac{(0.012M)m}{(0.27R)^2}$$

よって, $g' = G\dfrac{0.012M}{(0.27R)^2} \fallingdotseq 0.16 \cdot G\dfrac{M}{R^2}$ …②

①,②より $g' = 0.16g$　よって g' は g の約0.16倍となる。

157 6.0×10^{24} kg

【解説】

地表にある質量 m の物体にはたらく力を F とすると,

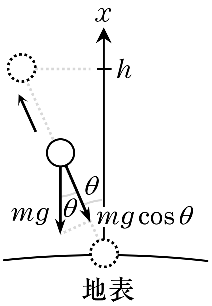
$F = mg = G\dfrac{mM}{R^2}$　よって,

$$M = \frac{gR^2}{G} = \frac{9.8 \times (6.4 \times 10^6)^2}{6.7 \times 10^{-11}}$$

$\fallingdotseq 5.99 \times 10^{24} \fallingdotseq 6.0 \times 10^{24}$

158 (1) 重力　(2) $-mgh$

【解説】



(2) 小球が移動した距離を L とすると, $h = L\cos\theta$ となる。よって, $L = \dfrac{h}{\cos\theta}$。

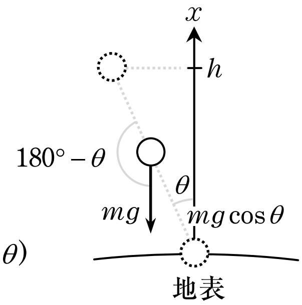
また, 重力は鉛直下向きで, 大きさは mg で, この重力の移動方向の分力は $mg\cos\theta$ であるので, 重力がした仕事は,

$$(-mg\cos\theta) \times L = (-mg\cos\theta) \times \frac{h}{\cos\theta}$$

$= -mgh$

※重力の分力と移動方向が逆向きであるので負になる。

【別解】



一定の力がする仕事は $W = Fx\cos\theta$ と表すことができたので,

$mgL\cos(180° - \theta)$

$= mg \times \dfrac{h}{\cos\theta} \times (-\cos\theta)$

$= -mgh$

159 (1) $-kx$　(2) $\displaystyle\int_0^A -(-kx)\,\mathrm{d}x$　(3) $\dfrac{1}{2}kA^2$

【解説】

(1) ばねの弾性力は, ばねが自然長に戻ろうとする向きにはたらく。よってその向きは, ばねが自然長より伸びているときは左向きで, 自然長より縮んでいるときは右向きである。このことからばねの弾性力は $-kx$ となる。

(2) 弾性力は保存力であるので, 定義式によって, $\displaystyle\int_0^A -(-kx)\,\mathrm{d}x$ と表すことができる。

(3) $\displaystyle\int_0^A -(-kx)\,\mathrm{d}x = \int_0^A kx\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}kx^2\right]_0^A$

$= \dfrac{1}{2}kA^2 - \dfrac{1}{2}k \cdot 0^2 = \dfrac{1}{2}kA^2$

160 (1) $-\dfrac{1}{x} + C$　(2) $\dfrac{1}{x^2} + C$

【解説】

公式 $\displaystyle\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ を利用する。

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int x^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{-2+1}x^{-2+1} + C$

$= -x^{-1} + C = -\dfrac{1}{x} + C$

(2) $\displaystyle\int -\frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int -2x^{-3}\,\mathrm{d}x$

$= \dfrac{-2}{-3+1}x^{-3+1} + C = x^{-2} + C = \dfrac{1}{x^2} + C$

161 (1) $F(x) = -G\dfrac{Mm}{x^2}$ N

(2) $-\dfrac{GMm}{r} + \dfrac{GMm}{a}$　(3) ∞

(4) $-G\dfrac{Mm}{r}$　(5) ① ∞

② $-\dfrac{GMm}{r}+\dfrac{GMm}{a}$　③ $-G\dfrac{Mm}{r}$

【解説】

(1) 2物体にはたらく万有引力を F N, 2物体の重心間距離を r m, 2物体の質量を M kg, m kg，万有引力定数を G とするとき，$F=G\dfrac{Mm}{r^2}$ N である。人工衛星にはたらく万有引力は x 軸の負の向きであるので,

$$F(x)=-G\frac{Mm}{x^2}$$

(2) $\displaystyle\int_a^r -F(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^r G\frac{Mm}{x^2}\,\mathrm{d}x$

$$=GMm\left[-\frac{1}{x}\right]_a^r=-\frac{GMm}{r}+\frac{GMm}{a}$$

(3) $\displaystyle\lim_{a\to 0}\int_a^r -F(x)\,\mathrm{d}x$

$$=\lim_{a\to 0}\left(-\frac{GMm}{r}+\frac{GMm}{a}\right)=\infty$$

(4) $\displaystyle\lim_{a\to \infty}\int_a^r -F(x)\,\mathrm{d}x$

$$=\lim_{a\to \infty}\left(-\frac{GMm}{r}+\frac{GMm}{a}\right)=-G\frac{Mm}{r}$$

(5) 位置エネルギー

$=\displaystyle\int_{\text{基準の座標}}^{\text{人工衛星の座標}} -F(x)\,\mathrm{d}x$ であることから, ①は(3)の解，②は(2)の解，③は(4)の解となる。

162 $v=\sqrt{\dfrac{GM}{6R}}$，$u=\sqrt{\dfrac{3GM}{2R}}$

【解説】

面積速度が一定であることから,

$\dfrac{1}{2}Ru\sin 90^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot 3Rv\sin 90^\circ$　より,

$u=3v\cdots$①

力学的エネルギーが一定であることから, 人工衛星の質量を m とすると,

$$\frac{1}{2}mu^2-G\frac{Mm}{R}=\frac{1}{2}mv^2-G\frac{Mm}{3R}$$

式を整理して,

$$\frac{1}{2}mu^2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{2GMm}{3R}$$

両辺に $\dfrac{2}{m}$ をかけると,

$u^2=v^2+\dfrac{4GM}{3R}\cdots$②

①,②より, u を消去すると

$(3v)^2=v^2+\dfrac{4GM}{3R}$　v について解くと,

$v=\sqrt{\dfrac{GM}{6R}}$　これを①式に代入して,

$$u=3\sqrt{\frac{GM}{6R}}=\sqrt{\frac{3GM}{2R}}$$

163 (1) 第1宇宙速度　(2) 第2宇宙速度

(3) 地球の中心を焦点とする楕円軌道

(4) $v_1=\sqrt{\dfrac{GM}{R}}$　(5) $v_2=\sqrt{\dfrac{2GM}{R}}$

(6) $v_1=\sqrt{gR}$　$v_2=\sqrt{2gR}$　(7) $\sqrt{2}$ 倍

【解説】

(4) 円運動する物体の質量を m とする。運動方程式は, $m\dfrac{{v_1}^2}{R}=G\dfrac{mM}{R^2}$　であり, v_1 について解くと, $v_1=\sqrt{\dfrac{GM}{R}}$

(5) 質量 m の物体を地球上で発射する初速度の大きさを v, 無限遠での速さを V とすると, 力学的エネルギー保存則より,

$\dfrac{1}{2}mv^2-G\dfrac{mM}{R}=\dfrac{1}{2}mV^2\cdots$①

無限遠で速さが0以上であればよいので,

$V\geqq 0$ のとき,

$\dfrac{1}{2}mV^2\geqq 0$ である。よって①式より,

$$\frac{1}{2}mv^2-G\frac{mM}{R}\geqq 0$$

より, $v\geqq\sqrt{\dfrac{2GM}{R}}$　よって, $v_2=\sqrt{\dfrac{2GM}{R}}$

(6) 地球表面付近では物体にはたらく重力と万有引力がほぼ等しいので,

$mg=G\dfrac{mM}{R^2}$ より, $g=G\dfrac{M}{R^2}$　よって,

$G\dfrac{M}{R}=gR$　となるので,

$$v_1=\sqrt{\frac{GM}{R}}=\sqrt{gR}$$

$v_2 = \sqrt{\dfrac{2GM}{R}} = \sqrt{2gR}$

(7) (6)より $v_1 = \sqrt{gR}$，$v_2 = \sqrt{2gR}$ であるので，$\sqrt{gR}$ を消去すると，$v_2 = \sqrt{2}v_1$

164 ①焦点　② 楕円　③ 2 乗　④3 乗　⑤ 面積　⑥ ケプラー

165 (1) 6.0×10^{24} kg　(2) 2.1×10^{20} N

【解説】

(1) 万有引力定数を G，重力加速度の大きさを g，地球の質量を M，地球の半径を R，地球上の物体の質量を m とするとき，地表付近の物体にはたらく重力と万有引力は等しいので，

$mg = G\dfrac{mM}{R^2}$　より，

$M = \dfrac{gR^2}{G} = \dfrac{9.8\cdot(6.4\times10^6)^2}{6.7\times10^{-11}}$

$\fallingdotseq 5.99\times10^{24}$　よって，6.0×10^{24} kg

(2) 月の質量を M'，地球と月との重心間距離を r，地球と月との間にはたらく万有引力の大きさを F とすると，

$F = G\dfrac{M'M}{r^2}$

$= 6.7\times10^{-11}\times\dfrac{7.4\times10^{22}\times5.99\times10^{24}}{(3.8\times10^8)^2}$

$\fallingdotseq 2.05\times10^{20}$　よって，2.1×10^{20} N

166 (1) $v = \sqrt{\dfrac{GM}{R+h}}$，$T = 2\pi(R+h)\sqrt{\dfrac{R+h}{GM}}$

(2) $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM}$

【解説】

(1) 人工衛星の質量を m とすると，人工衛星は半径 $R+h$ の等速円運動をしているので，人工衛星の地球の中心方向の運動方程式は，

$m\dfrac{v^2}{R+h} = G\dfrac{mM}{(R+h)^2}$　となり，これを v について解くと，$v = \sqrt{\dfrac{GM}{R+h}}$

周期 T は人工衛星が地球を 1 周するのにかかる時間なので，

$T = \dfrac{円周}{速さ} = \dfrac{2\pi(R+h)}{v} = 2\pi(R+h)\times\dfrac{1}{v}$

$= 2\pi(R+h)\sqrt{\dfrac{R+h}{GM}}$

(2) 人工衛星と地球の重心間距離は $a = R+h$ と表すことができる。また，(1) の結果より，

$T = 2\pi(R+h)\sqrt{\dfrac{R+h}{GM}}$ であるので，

$\dfrac{T^2}{a^3} = \left(2\pi(R+h)\sqrt{\dfrac{R+h}{GM}}\right)^2 \div (R+h)^3$

$= 4\pi^2(R+h)^2\cdot\dfrac{R+h}{GM}\times\dfrac{1}{(R+h)^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM}$

167 約 76 年

【解説】

地球の公転周期は 1 年で，公転軌道の長半径を a とすると，ハレー彗星の楕円軌道の長半径は $18a$ となる。ハレー彗星の公転周期を T とすると，ケプラーの第 3 法則より，$\dfrac{1^2}{a^3} = \dfrac{T^2}{(18a)^3}$

よって，$T = \sqrt{18^3} = 18\sqrt{18} = 18\cdot3\sqrt{2}$

$\fallingdotseq 54\cdot1.41 = 76.14$　よって，約 76 年

168 (1) $\dfrac{gR^2}{G}$ kg　(2) $\sqrt[3]{\dfrac{gR^2T^2}{4\pi^2}} - R$ m

【解説】

(1) 地上にある質量 m' の物体が受ける重力と万有引力は等しいので，地球の質量を M とすると，$m'g = G\dfrac{Mm'}{R^2}$ より，

$M = \dfrac{gR^2}{G}\cdots①$

(2) 静止衛星の質量を m，地球の質量 M，万有引力定数を G，地球の自転の角速度を ω とすると，静止衛星の円軌道の中心方向の運動方程式は，

$m(R+h)\omega^2 = G\dfrac{Mm}{(R+h)^2}$　式を整理すると，$(R+h)^3\omega^2 = GM\cdots②$

また，静止衛星の周期および角速度と，地球の周期および角速度はそれぞれ等しいので，角速度と周期の関係より，$\omega = \dfrac{2\pi}{T}\cdots③$

①,③を②式に代入すると，

$$(R+h)^3\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = gR^2$$

h について解くと, $h = \sqrt[3]{\dfrac{gR^2T^2}{4\pi^2}} - R$

169 (1) $G = \dfrac{R^2g}{M}$ (2) 第 1 宇宙速度第: $\sqrt{gR}$

2 宇宙速度: $\sqrt{2gR}$

【解説】

(1) 地表上にある質量 m の物体が受ける重力は, $G\dfrac{mM}{R^2}$, mg の 2 通りで表すことができる。

よって, $G\dfrac{mM}{R^2} = mg$ より, $G = \dfrac{R^2g}{M}$

(2) 第 1 宇宙速度は, 大気摩擦が無視できる物体が地表すれすれを等速円運動するときの速さであるので, 等速円運動する物体の質量を m, 第 1 宇宙速度を v_1 として, 地球の中心方向の運動方程式を立てると,

$m\dfrac{v_1^2}{R} = G\dfrac{mM}{R^2}$　よって, $v_1 = \sqrt{\dfrac{GM}{R}}$

(1) より, $G = \dfrac{R^2g}{M}$ をこの式に代入すると, $v_1 = \sqrt{gR}$ となる。第 2 宇宙速度は, 大気との摩擦が無視できる地表上の物体が地球の重力を振り切るための最低限の初速度である。地表から打ち出す物体の質量を m, 初速を v_2 とし, 地球の重力による位置エネルギーが 0 であるときの物体の速さを V とすると, 力学的エネルギー保存則より,

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{mM}{R} = \frac{1}{2}mV^2$$

これを V について解くと,

$$V = \sqrt{v_2^2 - G\frac{2M}{R}}$$

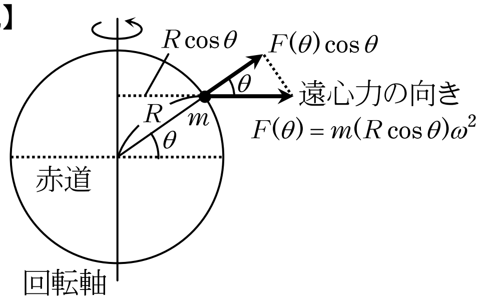
V が実数であるためには, $v_2^2 - G\dfrac{2M}{R} \geqq 0$

つまり, $v_2 \geqq \sqrt{\dfrac{2GM}{R}}$　(1) より, $G = \dfrac{R^2g}{M}$ をこの式に代入すると, $v_2 \geqq \sqrt{2gR}$ となるので, 第 2 宇宙速度は $\sqrt{2gR}$

170 (1) $F(\theta) = \dfrac{4\pi^2 mR\cos\theta}{T^2}$

(2) $f(\theta) = \dfrac{4\pi^2 mR\cos^2\theta}{T^2}$　(3) 3.4 N

【解説】



(1) 地球の自転の角速度を ω とすると,

$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

経度 θ にある質量 m の物体は図のように半径 $R\cos\theta$ の等速円運動をしている。よって,

$$F(\theta) = m(R\cos\theta)\omega^2 = m(R\cos\theta)\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

$$= \frac{4\pi^2 mR\cos\theta}{T^2}$$

(2) 遠心力を鉛直上向きに分解した成分が $f(\theta)$ であるので, 図より,

$$f(\theta) = F(\theta)\cos\theta = \frac{4\pi^2 mR\cos^2\theta}{T^2}$$

(3) 赤道にある質量 m の物体が, 遠心力によって鉛直上向きに受ける力は, (2) より,

$$f(0) = \frac{4\pi^2 mR\cos^2 0}{T^2} = \frac{4\pi^2 mR}{T^2}$$

$m = 100\,\mathrm{kg}$, $R = 6.4\times10^6\,\mathrm{m}$,

$T = 60\times60\times24\,\mathrm{s}$ とすると,

$$f(0) = \frac{4\times3.14^2\times100\times6.4\times10^6}{(24\times60\times60)^2}$$

$= 3.38 \fallingdotseq 3.4\,\mathrm{N}$

171 (1) $v_0 = \sqrt{\dfrac{GM}{R}}$　(2) $v = \sqrt{\dfrac{GM}{2R}}$,

$T_0 = 4\pi R\sqrt{\dfrac{2R}{GM}}$

(3) (ア) $V = \dfrac{v}{3}$　(イ) $v = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3GM}{R}}$

(4) $T = 16\pi R\sqrt{\dfrac{R}{GM}}$

【解説】

(1) 力学的エネルギー保存則より,

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{mM}{R} = -G\frac{mM}{2R}$$

よって, $v_0 = \sqrt{\dfrac{GM}{R}}$

(2) 地球の中心方向の運動方程式は,

$$m\frac{v^2}{2R} = G\frac{mM}{(2R)^2}$$

より, $v = \sqrt{\dfrac{GM}{2R}}$　また,このときの周期は,

$$T_0 = \frac{\text{円周}}{\text{速さ}} = \frac{2\pi\cdot 2R}{v} = 4\pi R\sqrt{\frac{2R}{GM}}$$

(3) (ア) ケプラーの第 2 法則(面積速度一定)

より, $\dfrac{1}{2}\cdot 2R\cdot v\sin 90° = \dfrac{1}{2}\cdot 6R\cdot V\sin 90°$

これを V について解くと, $V = \dfrac{v}{3}$ …①

(イ) 力学的エネルギー保存則より,

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{2R} = \frac{1}{2}mV^2 - G\frac{mM}{6R}$$

①より V を消去すると,

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{2R} = \frac{1}{2}m\left(\frac{v}{3}\right)^2 - G\frac{mM}{6R}$$

これを v について解くと, $v = \sqrt{\dfrac{3GM}{4R}}$

(4) ケプラーの第 3 法則 $\left(\dfrac{T^2}{a^3} = \text{一定}\right)$ より,

$$\frac{T_0^2}{(2R)^3} = \frac{T^2}{(4R)^3}$$　よって, $T = 2\sqrt{2}T_0$

(2)より, $T_0 = 4\pi R\sqrt{\dfrac{2R}{GM}}$ であるので,

$$T = 2\sqrt{2}\cdot 4\pi R\sqrt{\frac{2R}{GM}} = 16\pi R\sqrt{\frac{R}{GM}}$$

172 (1) 0℃:273 K　27℃:300 K

(2) $c = 0.4\,\mathrm{J/g\cdot K}$

$C = 80\,\mathrm{J/K}$　(3) $C = 90\,\mathrm{J/K}$, $Q = 450\,\mathrm{J}$

(4) 45℃　(5) $6.6\times 10^4\,\mathrm{J}$　(6) $n = \dfrac{N}{N_\mathrm{A}}$

【解説】

(1) t℃のとき T K であるとすると, $T = 273 + t$ であるので, 0℃は $273 + 0 = 273$ K, 27℃は $273 + 27 = 300$ K となる。

(2) $c = \dfrac{800\,\mathrm{J}}{200\,\mathrm{g}\times(30-20)\,\mathrm{K}} = 0.4\,\mathrm{J/g\cdot K}$,

$C = 0.4\,\mathrm{J/g\cdot K}\times 200\,\mathrm{g} = 80\,\mathrm{J/K}$

(3) $C = 0.45\,\mathrm{J/g\cdot K}\times 200\,\mathrm{g} = 90\,\mathrm{J/K}$,

$Q = 90\,\mathrm{J/K}\times 5\,\mathrm{K} = 450\,\mathrm{J}$

(4) 水の比熱を c J/g・K, 混ぜた後の水の温度を x℃($20 < x < 60$)とする。熱量保存の法則より, 低温の物質が得た熱量＝高温の物質が失った熱量 であるので,

$c\,\mathrm{J/g\cdot K}\times 300\,\mathrm{g}\times(x-20)\,\mathrm{K}$

$= c\,\mathrm{J/g\cdot K}\times 500\,\mathrm{g}\times(60-x)\,\mathrm{K}$　両辺を c で割ると, $300(x-20) = 500(60-x)$

これを解くと, $x = 45$ ℃

(5) 水の融解熱は 0℃,1 g の氷を 0℃,1 g に水に変えるのに必要な熱量である。よって求める熱量は

$3.3\times 10^2\,\mathrm{J/g}\times 200\,\mathrm{g} = 6.6\times 10^4\,\mathrm{J}$

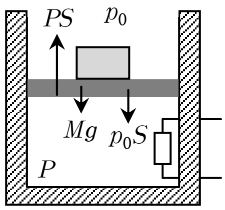
(6) 1 mol : N_A 個 $= n$ mol : N 個 であるので,

$n = \dfrac{N}{N_\mathrm{A}}$

173 (1) $p_0 + \dfrac{Mg}{S}$　(2) $\dfrac{MgL}{p_0S + Mg}$

【解説】

(1) おもりをのせる前のシリンダー内の気体の圧力は外気と同じ p_0 Pa である。おもりをのせた後のシリンダー内の圧力を P Pa とすると, ピストンにはたらく力のつり合いの式は, $p_0S + Mg = PS$　となり, これを P について解くと, $P = p_0 + \dfrac{Mg}{S}$



(2) おもりをのせた後のシリンダー内の気体の体積を V とすると, ボイルの法則より,

$p_0LS = PV$　(1)より, $P = p_0 + \dfrac{Mg}{S}$ を代入すると, $p_0LS = \left(p_0 + \dfrac{Mg}{S}\right)V$

これを V について解くと,

$V = \dfrac{p_0LS^2}{Sp_0+Mg}$　ピストンが下がった距離を x m とすると,

$V = S(L-x) = \dfrac{p_0LS^2}{Sp_0+Mg}$　となり, これを

x について解くと, $x = \dfrac{MgL}{Sp_0+Mg}$

174 0.2 m

【解説】

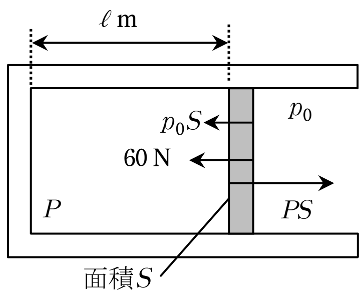
ピストンの面積を S m², 加熱後にピストンが上昇した距離を x m とすると, 加熱前後で理想気体の圧力は一定であるので, シャルルの法則より, $\dfrac{0.6S}{27+273} = \dfrac{(0.6+x)S}{127+273}$

これを x について解くと, $x = 0.2$ m

175 ① 標準状態　② 2.24

176 (1) 1.2×10^5 Pa　(2) 0.29 m

【解説】



(1) 60 N の力を加えたときのシリンダー内の気体の圧力を P Pa とすると, ピストンにはたらく力のつり合いの式は,

$1.0\times10^5\times3.0\times10^{-3}+60 = P\times3.0\times10^{-3}$

となり, これを P について解くと,

$P = 1.2\times10^5$ Pa

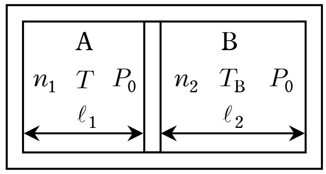
(2) 60 N の力を加えたときのシリンダーの底からピストンまでの距離を ℓ m とすると, ボイル・シャルルの法則より,

$\dfrac{1.0\times10^5\times3.0\times10^{-3}\times0.30}{273+27}$

$= \dfrac{1.2\times10^5\times3.0\times10^{-3}\times\ell}{273+77}$　これを ℓ について解くと, $\ell = 0.291 \fallingdotseq 0.29$ m

177 (1) $T_B = \dfrac{\ell_2n_1}{\ell_1n_2}T$　(2) $T_A = \dfrac{\ell_2(\ell_1+\ell)}{\ell_1(\ell_2-\ell)}T$

【解説】

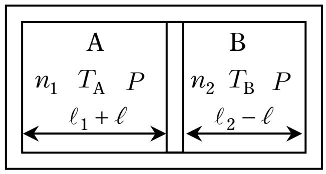


(1) なめらかに動くピストンにはたらく力がつり合っているので, A,B 内の気体の圧力は等しい。その大きさを P_0 Pa, ピストンの面積を S m², 気体定数を R とすると, 理想気体の状態方程式は,

A: $P_0S\ell_1 = n_1RT$ …①

B: $P_0S\ell_2 = n_2RT_B$ …②

②÷①より $\dfrac{\ell_2}{\ell_1} = \dfrac{T_Bn_2}{Tn_1}$　となり, これを T_B について解くと, $T_B = \dfrac{\ell_2n_1}{\ell_1n_2}T$ K



(2) A の温度が T_A K になったときの A,B 内の圧力を P Pa とすると, 理想気体の状態方程式は,

A: $PS(\ell_1+\ell) = n_1RT_A$ …③

B: $PS(\ell_2-\ell) = n_2RT_B$ …④　③÷④より,

$\dfrac{\ell_1+\ell}{\ell_2-\ell} = \dfrac{n_1T_A}{n_2T_B}$

となり, これを T_A について解くと,

$T_A = \dfrac{n_2}{n_1}\cdot\dfrac{\ell_1+\ell}{\ell_2-\ell}T_B$

(1)の T_B をこの式に代入すると,

$T_A = \dfrac{n_2}{n_1}\cdot\dfrac{\ell_1+\ell}{\ell_2-\ell}\cdot\dfrac{\ell_2n_1}{\ell_1n_2}T = \dfrac{\ell_2(\ell_1+\ell)}{\ell_1(\ell_2-\ell)}T$

178 窒素分子の分子量:28 g/mol

窒素分子のモル質量: 2.8×10^{-2} kg/mol

【解説】

周期表より N = 14.01 であるので,

$N_2 = 28.02 \fallingdotseq 28$ g/mol $= 2.8\times10^{-2}$ kg/mol

179 ① $(-v_x, v_y, v_z)$　② $(-2mv_x, 0, 0)$

③ $(2mv_x, 0, 0)$　④ $2mv_x$

⑤ $\dfrac{v_xt}{2L}$　⑥ $\dfrac{mv_x^2}{L}$　⑦ $\dfrac{N m\overline{v^2}}{3L}$

⑧ $\dfrac{N m\overline{v^2}}{3L^3}$　⑨ $\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{R}{N_A}T$　⑩ $10\sqrt{\dfrac{30RT}{M}}$

【解説】

① 壁面Aの衝突によって変化するのは速度のx成分だけで，弾性衝突であるのでそのx成分は符号が逆になる。よって，

$\vec{v}'=(-v_x, v_y, v_z)$

② 分子が受ける力積＝衝突後の運動量－衝突前の運動量であるので，

$$\begin{aligned}\vec{I}&=m\vec{v}'-m\vec{v}\\&=m(-v_x, v_y, v_z)-m(v_x, v_y, v_z)\\&=(-2mv_x, 0, 0)\end{aligned}$$

③,④ 壁面Aが受ける力積は，分子が受ける力積と大きさが等しく逆向きであるので，

$\vec{I}'=-\vec{I}=(2mv_x, 0, 0)$　よって，

$|\vec{I}'|=\sqrt{(2mv_x)^2+0^2+0^2}=2mv_x$

⑤ 分子が壁面Aに衝突した後，次に衝突するまでにかかる時間は，(容器内のx軸方向の往復の距離)÷｜速度のx成分｜で求められるので，$2L\div v_x=\dfrac{2L}{v_x}$ s

よって，t s間に衝突する回数は，

$t\,\mathrm{s}\div\dfrac{2L}{v_x}\mathrm{s}=\dfrac{v_xt}{2L}$となる。

⑥ t s間に壁面Aが分子1個からf Nを受け続けていると仮定すると，壁面Aがt s間に受ける力積の大きさftは，

$|\vec{I}'|\times$(t s間の衝突回数)に等しいので，

$ft=2mv_x\times\dfrac{v_xt}{2L}$　よって，$f=\dfrac{mv_x^2}{L}$

⑦ ⑥より，1個の分子が壁面Aに及ぼす力が

$f=\dfrac{mv_x^2}{L}$であるので，N個の分子の平均をとると，分子1個あたり$\dfrac{m\overline{v_x^2}}{L}$ Nの力を壁面Aに及ぼしていると考えられる。よって，N個の分子が壁面Aに与える力は

$$F=N\cdot\frac{m\overline{v_x^2}}{L}=N\cdot\frac{m}{L}\cdot\frac{1}{3}\overline{v^2}=\frac{Nm\overline{v^2}}{3L}$$

⑧ $p=\dfrac{F}{L^2}=\dfrac{Nm\overline{v^2}}{3L^3}$

⑨ $L^3=V$であるので，状態方程式

$pV=nRT$は$pL^3=nRT$となる。

この式に$p=\dfrac{Nm\overline{v^2}}{3L^3}$を代入すると，

$\dfrac{Nm\overline{v^2}}{3L^3}\cdot L^3=nRT$　よって，

$\dfrac{Nm\overline{v^2}}{3}=nRT$　さらにこの式に

$n=\dfrac{N}{N_\mathrm{A}}$を代入すると，

$\dfrac{Nm\overline{v^2}}{3}=\dfrac{N}{N_\mathrm{A}}\cdot RT$より，

$\dfrac{m\overline{v^2}}{3}=\dfrac{RT}{N_\mathrm{A}}$となる。この式の両辺を$\dfrac{3}{2}$倍すると，$\dfrac{1}{2}m\overline{v^2}=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{R}{N_\mathrm{A}}T$　よって，

$\overline{E}=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{R}{N_\mathrm{A}}T$

⑩ $\dfrac{1}{2}m\overline{v^2}=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{R}{N_\mathrm{A}}T$より，$\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\dfrac{3RT}{mN_\mathrm{A}}}$

mN_A kg/molは1 molの分子の質量(モル質量)を表しているので，

M g/mol$=mN_\mathrm{A}$ kg/mol$\times10^3$となる。

よって，$mN_\mathrm{A}=M\times10^{-3}$となるので，

$$\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3RT}{mN_\mathrm{A}}}=\sqrt{\frac{3RT}{M\times10^{-3}}}=\sqrt{\frac{3000RT}{M}}$$

$$=10\sqrt{\frac{30RT}{M}}$$

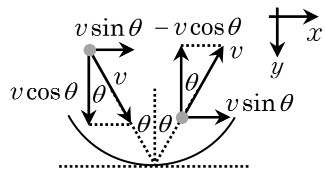
180 (1) $2mv\cos\theta$　(2) $2r\cos\theta$

(3) $\dfrac{vt}{2r\cos\theta}$　(4) $\dfrac{mv^2t}{r}$

(5) $\dfrac{Nm\overline{v^2}}{r}$　(6) $\dfrac{Nm\overline{v^2}}{3V}$　(7) $\dfrac{3}{2}nRT$

【解説】

(1) 図のようにxy軸をとり，1回の衝突で分子が壁面から受ける力積を$\vec{I}$とすると，



この力積は分子の運動量の変化であるので，

$$\vec{I}=m\begin{pmatrix} v\sin\theta \\ -v\cos\theta \end{pmatrix}-m\begin{pmatrix} v\sin\theta \\ v\cos\theta \end{pmatrix}$$

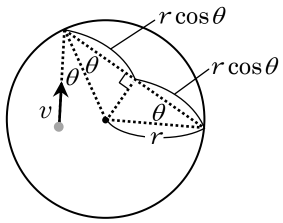
$$=\begin{pmatrix} 0 \\ -2mv\cos\theta \end{pmatrix}$$ よって,

$$|\vec{I}|=\sqrt{0^2+(-2mv\cos\theta)^2}=2mv\cos\theta$$

作用反作用の法則により,分子が受ける力積の大きさと壁が受ける力積の大きさは等しいので,壁が受ける力積の大きさも,

$|\vec{I}|=2mv\cos\theta$ となる。

(2)



図のように, $a=r\cos\theta+r\cos\theta=2r\cos\theta$

(3) 分子が壁面に衝突してから次に衝突するまでにかかる時間は

$2r\cos\theta\,\mathrm{m}\div v\,\mathrm{m/s}=\dfrac{2r\cos\theta}{v}\,\mathrm{s}$ 　であるので,

t s 間で衝突する回数は,

$$t\,\mathrm{s}\div\frac{2r\cos\theta}{v}\,\mathrm{s}=\frac{vt}{2r\cos\theta}$$

(4) 1 回の衝突で壁面が受ける力積は(1) より $2mv\cos\theta$ で,(3) より t s 間に $\dfrac{vt}{2r\cos\theta}$ 回衝突するので,求める力積は

$$2mv\cos\theta\times\frac{vt}{2r\cos\theta}=\frac{mv^2t}{r}$$

(5) 分子 1 個が t s に壁面に与える力積の大きさは(4) より, $\dfrac{mv^2t}{r}$ である。ここで N 個の分子を考えると,その速さの 2 乗の平均が $\overline{v^2}$ であるので, N 個の分子が t s に壁面に与える力積の大きさは $N\times\dfrac{m\overline{v^2}t}{r}=\dfrac{Nm\overline{v^2}t}{r}$ であると考えられる。壁面が N 個の分子から平均して f の力を受け続けていると考えると,

$ft=\dfrac{Nm\overline{v^2}t}{r}$ となるので, $f=\dfrac{Nm\overline{v^2}}{r}$ となる。

【注意】 それぞれの分子の速さを $v_1, v_2, v_3\cdots v_N$ とする。壁面は N 個の分子から t s 間に f N の力を受け続けていると考えると,

(4)より, $ft=\dfrac{mv_1^2t}{r}+\dfrac{mv_2^2t}{r}+\cdots+\dfrac{mv_N^2t}{r}$

$$=\frac{mt}{r}(v_1^2+v_2^2+\cdots+v_N^2)$$

ここで, $\overline{v^2}=\dfrac{v_1^2+v_2^2+\cdots+v_N^2}{N}$

より, $v_1^2+v_2^2+\cdots+v_N^2=N\overline{v^2}$ であるので,

$ft=\dfrac{mt}{r}\cdot N\overline{v^2}=\dfrac{mtN\overline{v^2}}{r}$ 　よって,

$$f=\frac{Nm\overline{v^2}}{r}$$

(6) $P=\dfrac{f}{4\pi\pi r^2}=\dfrac{Nm\overline{v^2}}{r}\cdot\dfrac{1}{4\pi r^2}=\dfrac{Nm\overline{v^2}}{4\pi r^3}$

ここで $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$ であるので, $4\pi r^3=3V$

よって, $P=\dfrac{Nm\overline{v^2}}{3V}$

(7) 気体の状態方程式は $PV=nRT$ で, (6) より, $PV=\dfrac{Nm\overline{v^2}}{3}$ であるので,これらの式から PV を消去すると, $\dfrac{Nm\overline{v^2}}{3}=nRT$

この両辺を $\dfrac{3}{2}$ 倍すると,

$N\cdot\dfrac{1}{2}m\overline{v^2}=\dfrac{3}{2}nRT$ 　となり,この式は運動エネルギーの総和を表しているので,

$U=\dfrac{3}{2}nRT$ となる。

181 　(1) $6.0\times10^{-2}\,\mathrm{m^3}$ 　(2) $2.0\times10^{-2}\,\mathrm{m^3}$

(3) $7.2\times10^{-2}\,\mathrm{m^3}$ 　(4) 2.4 mol

【解説】

(1) 求める体積を V とすると,ボイルの法則より,

$$2.0\times10^5\times3.0\times10^{-2}=1.0\times10^5\times V$$

これを V について解くと, $V=6.0\times10^{-2}\,\mathrm{m^3}$

(2) 求める体積を V とすると,シャルルの法則より, $\dfrac{3.0\times10^{-2}}{27+273}=\dfrac{V}{-73+273}$

これを V について解くと, $V=2.0\times10^{-2}\,\mathrm{m^3}$

(3) 求める体積を V とすると，ボイル・シャルルの法則より，

$$\frac{2.0\times10^5\times3.0\times10^{-2}}{27+273}=\frac{1.0\times10^5\times V}{87+273}$$

これを V について解くと，$V=7.2\times10^{-2}\ \mathrm{m^3}$

(4) 理想気体の状態方程式 $PV=nRT$ より，

$2.0\times10^5\times3.0\times10^{-2}=n\times8.3\times(27+273)$

これを n について解くと，$n≒2.4\ \mathrm{mol}$

182 (1) 1.38×10^{-23}　(2) 5.8×10^{-21} J

(3) 4.7×10^{-26} kg　(4) 5.0×10^2 m/s

【解説】

(1) ボルツマン定数は $k=\dfrac{R}{N_A}=\dfrac{8.3}{6.02\times10^{23}}$

$=1.378\times10^{-23}≒1.38\times10^{-23}$

(2) $\dfrac{1}{2}m\overline{v^2}=\dfrac{3}{2}kT$（$k$ はボルツマン定数）であるので，

$$\frac{1}{2}m\overline{v^2}=\frac{3}{2}kT=\frac{3}{2}\cdot1.38\times10^{-23}\times280$$

$≒5.79\times10^{-21}≒5.8\times10^{-21}$ J

(3) モル質量が 0.028 kg/mol であるので，窒素の質量は 1 mol あたり 0.028 kg である。窒素分子 1 個の質量を x kg とすると，6.02×10^{23} 個：0.028 kg = 1 個：x kg となり，これを解くと，

$$x=\frac{0.028}{6.02\times10^{23}}≒4.65\times10^{-26}$$

$≒4.7\times10^{-26}$ kg

(4) (1)より，$\dfrac{1}{2}m\overline{v^2}≒5.79\times10^{-21}$ J で，(2)より，窒素分子 1 個の質量は $m≒4.65\times10^{-26}$ kg であるので，

$\dfrac{1}{2}\times4.65\times10^{-26}\times\overline{v^2}≒5.79\times10^{-21}$ J　よって，

$$\overline{v^2}=\sqrt{\frac{2\times5.79\times10^{-21}}{4.65\times10^{-26}}}$$

$≒499.0≒5.0\times10^2$ m/s

【別解】

$\dfrac{1}{2}m\overline{v^2}=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{R}{N_\mathrm{A}}T$ より，$\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\dfrac{3RT}{N_\mathrm{A}m}}$

となり，$N_\mathrm{A}m$ kg/mol はモル質量を表しているので，

$$\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3\times8.3\times280}{0.028}}≒498.9≒5.0\times10^2\ \mathrm{m/s}$$

183 (1) 1 倍　(2) $\sqrt{5}$ 倍　(3) 2 倍

【解説】

(1) ヘリウム分子の質量を m kg，速さの 2 乗平均を $\overline{v^2}$，ネオン分子の質量を m' kg，速さの 2 乗平均を $\overline{v'^2}$ とする。また，ボルツマン定数を k とすると，27℃(300 K) でのヘリウム分子の平均の運動エネルギー

$=\dfrac{1}{2}m\overline{v^2}=\dfrac{3}{2}k\cdot300=450k$ …①

27℃(300 K) でのネオン分子の平均の運動エネルギー

$=\dfrac{1}{2}m'\overline{v'^2}=\dfrac{3}{2}k\cdot300=450k$ …②

①,②はどちらも等しいので 1 倍となる。

(2) ①より，$\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\dfrac{450k}{m}}$　②より，

$\sqrt{\overline{v'^2}}=\sqrt{\dfrac{450k}{m'}}$

求める値を x とすると，$\sqrt{\overline{v^2}}=x\sqrt{\overline{v'^2}}$ より，

$$x=\sqrt{\overline{v^2}}\div\sqrt{\overline{v'^2}}=\sqrt{\frac{450k}{m}}\div\sqrt{\frac{450k}{m'}}=\sqrt{\frac{m'}{m}}$$

原子量は 1 mol あたりの質量(g) であるので，

$m:m'=4$ g/mol : 20 g/mol $=1:5$

よって，$m'=5m$ となるので，

$$x=\sqrt{\frac{m'}{m}}=\sqrt{\frac{5m}{m}}=\sqrt{5}$$

よって，$\sqrt{5}$ 倍となる。

(3) 327℃(600 K) でのヘリウム分子の平均の運動エネルギー $=\dfrac{3}{2}k\cdot600=900k$ …③

①の 2 倍が③になっているので，2 倍となる。

184 (1) A: $n_\mathrm{A}=\dfrac{2pV}{RT}$　B: $n_\mathrm{B}=\dfrac{pV}{RT}$

(2) $\dfrac{15}{2}pV$　(3) $p'=\dfrac{5}{3}p$，$T'=\dfrac{5}{3}T$

【解説】

(1) 理想気体の状態方程式より，

A: $2p\cdot2V=n_\mathrm{A}R\cdot2T$　B: $pV=n_\mathrm{B}RT$

よって, $n_A=\dfrac{2pV}{RT}$, $n_B=\dfrac{pV}{RT}$

(2) 運動エネルギーの合計を U とすると,

$U=\dfrac{3}{2}n_AR\cdot 2T+\dfrac{3}{2}n_BRT$　(1)より,

$n_A=\dfrac{2pV}{RT}, n_B=\dfrac{pV}{RT}$ を代入すると,

$U=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{2pV}{RT}\cdot R\cdot 2T+\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{pV}{RT}\cdot RT$

$=6pV+\dfrac{3}{2}pV=\dfrac{15}{2}pV$

(3) 理想気体の状態方程式より,

$p'\cdot 3V=(n_A+n_B)RT'$

(1)より, $n_A=\dfrac{2pV}{RT}$, $n_B=\dfrac{pV}{RT}$ より,

$n_A+n_B=\dfrac{3pV}{RT}$ であるので,

$p'\cdot 3V=\dfrac{3pV}{RT}\cdot RT'=\dfrac{3pVT'}{T}$　よって,

$p'=\dfrac{pT'}{T}\cdots$①　また, 熱は外部に逃げないので, コックを開く前と後では, 分子の運動エネルギーの合計が保存される。よって, (2)より,

$\dfrac{15}{2}pV=\dfrac{3}{2}(n_A+n_B)RT'$　よって,

$5pV=(n_A+n_B)RT'$

$n_A+n_B=\dfrac{3pV}{RT}$　であるので,

$5pV=\dfrac{3pV}{RT}\cdot RT'=3pV\dfrac{T'}{T}$　よって,

$T'=\dfrac{5}{3}T$　これを①に代入すると,

$p'=\dfrac{p}{T}\cdot\dfrac{5}{3}T=\dfrac{5}{3}p$

185 (1) $\dfrac{V_0T}{T_0}$　(2) $\rho=\dfrac{\rho_0T_0}{T}$　(3) $\dfrac{\rho_0V_0T_0}{\rho_0V_0-m}$

【解説】

(1) 気球内の空気の温度を上昇させると, 空気の膨張によって, 空気は一部気球外に逃げてしまうが, 気球内部の圧力と外部の圧力はつり合っているので, 加熱前後で気球内部の気体の圧力は外気と同じで一定である。温める前の熱気球内部の空気(T_0 K, V_0 m^3) が T K, V m^3 になったとすると, シャルルの法則より,

$\dfrac{V_0}{T_0}=\dfrac{V}{T}$　よって,　$V=\dfrac{V_0T}{T_0}$

(2) 温度が T_0 であるとき, 熱気球の中の空気の質量は, ρ_0 kg/m$^3\times V_0$ m$^3=\rho_0V_0$ kg

温度が T であるときの体積は V であるので,

$\rho=\dfrac{\rho_0V_0\ \text{kg}}{V\ \text{m}^3}=\dfrac{\rho_0V_0}{TV_0/T_0}=\dfrac{\rho_0T_0}{T}$ kg/m^3

【別解】

大気圧を P Pa とし, 温める前の熱気球内部の空気(T_0 K, V_0 m^3) の物質量を n_0 mol, 温めた後の熱気球内部の空気(T K, V_0 m^3) の物質量を n mol とすると, 気体の状態方程式より,

$PV_0=n_0RT_0\cdots$①　　$PV_0=nRT\cdots$②

①, ②より PV を消去すると, $nRT=n_0RT_0$

よって, $n=\dfrac{n_0T_0}{T}$ となり, 温めた後の物質量は温める前に比べて $\dfrac{T_0}{T}$ 倍になる。物質量(mol)と質量(kg) は比例するので, 変化の前後で気体の体積が等しいときは, 物質量(mol) と密度(kg/m^3) も比例する。よって, 温めた後の気球内の密度も温める前の $\dfrac{T_0}{T}$ 倍となるので,

$\rho=\dfrac{\rho_0T_0}{T}$ となる。

(3) 浮力の公式は $F=\rho Vg$ (ρ :周りの流体の密度, V:浮力を受ける物体の体積, g:重力加速度) であるので, 熱気球が受ける浮力は ρ_0V_0g , 熱気球が受ける重力は $(m+\rho V_0)g$ であるので, 熱気球が浮上するための条件は,

$\rho_0V_0g>(m+\rho V_0)g$　両辺を g で割ると,

$\rho_0V_0>m+\rho V_0$

さらに(2)の $\rho=\dfrac{\rho_0T_0}{T}$ を代入すると,

$\rho_0V_0>m+\dfrac{\rho_0T_0}{T}V_0$　この式より,

$T>\dfrac{\rho_0V_0T_0}{\rho_0V_0-m}$　よって, 風船内部の温度が $\dfrac{\rho_0V_0T_0}{\rho_0V_0-m}$ を超えれば熱気球は浮上する。

186 (1) 力積の大きさ: $2mv_x$

衝突する回数: $\dfrac{v_x}{2L}$　(2) $\dfrac{Nm\overline{v_x^2}}{L}$

(3) $\dfrac{Nm\overline{v^2}}{3L^3}$　(4) $\dfrac{3}{2}nRT$

【解説】

(1) 内壁 S が 1 回の衝突で受ける力積は分子の運動量の x 成分の変化に等しいので，その力積の大きさは，$|-mv_x - mv_x| = 2mv_x$

※運動量の y 成分，z 成分は変化しないので，x 成分の変化だけを求めればよい。また，分子が内壁 S に衝突してから，再び S に衝突するまでにかかる時間は，

$2L \div v_x = \dfrac{2L}{v_x}$ s である。よって $\dfrac{2L}{v_x}$ s で 1 回衝突することになる。ここで，1 s で a 回衝突すると仮定すると，

$\dfrac{2L}{v_x}$ s : 1回 = 1 s : a回　より，$a = \dfrac{v_x}{2L}$ 回

つまり，1 s で $\dfrac{v_x}{2L}$ 回衝突することになる。

(2) 内壁 S は 1 個の分子から 1 s 間に平均で f の力を受け続けていると仮定すると，(1) より内壁 S が 1 s で受ける力積の大きさは

$f\,\mathrm{N} \times 1\,\mathrm{s} = 2mv_x \times \dfrac{v_x}{2L} = \dfrac{mv_x^2}{L}$　となり，

$f = \dfrac{mv_x^2}{L}$ N となる。よって，N 個の分子が内壁 S に与える力を考えたとき，分子 1 個あたり平均で $\overline{f} = \dfrac{m\overline{v_x^2}}{L}$ N の力を与えていると考えられるので，N 個の分子が内壁 S に与える力は $N\overline{f} = \dfrac{Nm\overline{v_x^2}}{L}$ N となる。よって N 個の分子が内壁 S に対して単位時間に与える力積の大きさは，$N\overline{f}\,\mathrm{N} \times 1\,\mathrm{s} = \dfrac{Nm\overline{v_x^2}}{L}\,\mathrm{N \cdot s}$

(3) 内壁 S の面積 L^2 m^2 に $N\overline{f}$ N の力が加わることになるので，

$P = \dfrac{N\overline{f}}{L^2} = \dfrac{Nm\overline{v_x^2}}{L^3} \cdots$①

ここで等方性より，$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$ で，

$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = 3\overline{v_x^2}$ であるので，

$\overline{v_x^2} = \dfrac{\overline{v^2}}{3}$ が成り立つ。これを①に代入すると，

$P = \dfrac{Nm}{L^3} \cdot \dfrac{\overline{v^2}}{3} = \dfrac{Nm\overline{v^2}}{3L^3}$

(4) 理想気体の状態方程式より，容器の体積は L^3 であるので，$PL^3 = nRT \cdots$②

また，(3) より，$PL^3 = \dfrac{Nm\overline{v^2}}{3} \cdots$③　②,③より PL^3 を消去すると，$\dfrac{Nm\overline{v^2}}{3} = nRT$ となり，

両辺を $\dfrac{3}{2}$ 倍すると，$N \cdot \dfrac{1}{2}m\overline{v^2} = \dfrac{3}{2}nRT$

この左辺は平均運動エネルギーの総和を表しているので，求める式は $\dfrac{3}{2}nRT$

187 7.5×10^3 J

【解説】

8.0 g のヘリウムの物質量を n mol とすると，
1 mol:4.0 g = n mol:8.0 g より，$n = 2.0$ mol
よってヘリウムは 18 族(希ガス) で単原子分子であるので，このときの内部エネルギーは

$U = \dfrac{3}{2}nRT = \dfrac{3}{2} \times 2.0 \times 8.31 \times (27 + 273)$

$= 7479 ≒ 7.5 \times 10^3$ J

188 1.6×10^3 J

【解説】

酸素の原子量は 16 g/mol であるので，酸素の分子量は $O_2 = 32$ g/mol となる。
8.0g の酸素分子の物質量を n mol とすると，
1 mol:32.0 g = n mol:8.0 g より，$n = 0.25$ mol
酸素は二原子分子であるので，このときの内部エネルギーは，

$U = \dfrac{5}{2}nRT = \dfrac{5}{2} \times 0.25 \times 8.31 \times (27 + 273)$

$= 1558.125 ≒ 1.6 \times 10^3$ J

189 $\dfrac{3}{2}nR\Delta T$

【解説】

温度が $T_A \to T_B$ と上昇したとすると，それぞれの温度での内部エネルギーは，

$U_A = \frac{3}{2}nRT_A$, $U_B = \frac{3}{2}nRT_B$ であるので,

$\Delta U = U_B - U_A = \frac{3}{2}nR(T_B - T_A) = \frac{3}{2}nR\Delta T$

190 60 J

【解説】

圧力 P が一定のとき,気体がする仕事 W は,体積変化 ΔV を用いて, $W = P\Delta V$ と表される。よって,

$W = P\Delta V$ J $= 1.0\times10^5\times6.0\times10^{-4} = 60$ J

191 (1) A→B, B→C　(2) D→A

【解説】

(1) ボイル･シャルルの法則より, $\frac{PV}{T} =$ 一定 であることに注意する。
A→B では,体積 V が一定で,圧力 P が増加するので,温度 T は増加する。
B→C では,圧力 P が一定で,体積 V が増加するので,温度 T は増加する。
C→D では,体積 V が一定で,圧力 P が減少するので,温度 T は減少する。
D→A では,圧力 P が一定で,体積 V が減少するので,温度 T は減少する。よって,気体の温度が上昇する過程は, A→B, B→C となる。

(2) 気体がされる仕事が正であるということは,気体が外にする仕事が負であるということである。D→A の過程のみ体積変化が負であり,このとき気体は外に負の仕事をするので,気体がされる仕事が正である過程は, D→A となる。

192 (1) 0.50 mol　(2) 2.5×10^3 J　(3) 800 K
(4) 1.7×10^3 J　(5) $PV = 1.7\times10^3$

【解説】

(1) A の温度,圧力,体積はそれぞれ,
$T_A = 400$ K , $P_A = 2.0\times10^5$ Pa ,
$V_A = 8.3\times10^{-3}$ m^3 であるので,気体の物質量を n mol とすると,理想気体の状態方程式より, $P_AV_A = nRT_A$　よって,

$n = \frac{P_AV_A}{RT_A} = \frac{2.0\times10^5\times8.3\times10^{-3}}{8.3\times400}$
$= 0.5$ mol

(2) 内部エネルギーの公式 $\frac{3}{2}nRT$ より,

$\frac{3}{2}nRT_A = \frac{3}{2}\times0.5\times8.3\times400 = 2490$
$\fallingdotseq 2.5\times10^3$ J

(3) A→B の変化では圧力が一定であるので,シャルルの法則より, $\frac{V_A}{T_A} = \frac{V_B}{T_B}$ であるので,

$T_B = \frac{V_BT_A}{V_A} = \frac{16.6\times10^{-3}\times400}{8.3\times10^{-3}} = 800$ K

(4) A→B の変化では圧力が一定であるので,公式 $W = P\Delta V$ より, $W_{AB} = P_A(V_B - V_A)$
$= 2.0\times10^5\times(16.6-8.3)\times10^{-3}$
$= 1.66\times10^3 \fallingdotseq 1.7\times10^3$ J

(5) C→A では等温変化であるので,ボイルの法則より $PV =$ 一定 である。
よって $PV = k \cdots$① とおくと, A の座標は
$(V, P) = (8.3\times10^{-3}, 2.0\times10^5)$
であるので,これを①に代入すると,
$8.3\times10^{-3}\times2.0\times10^5 = k$　より,
$k = 1.66\times10^3 \fallingdotseq 1.7\times10^3$　よって,
$PV = 1.7\times10^3$

【別解】

CA 間の温度は 400 K で一定であるので,理想気体の状態方程式より, $PV = nRT$
$= 0.5\times8.3\times400 \fallingdotseq 1.7\times10^3$　よって,
$PV = 1.7\times10^3$

193 50 J

【解説】

定積変化の場合,熱力学第 1 法則より,
$Q = \Delta U + 0$ であるので, $\Delta U = Q = 50$ J

194 (1) 1.0×10^2 J　(2) 4.0×10^2 J

【解説】

(1) 気体の体積の変化は,
$\Delta V = 2.0\times10^{-3}$ m$^2\times0.5$ m $= 1.0\times10^{-3}$ m^3
シリンダー内の気体の圧力 P は,ピストンがなめらかに動くので,常に大気圧と等しい。よって,気体がした仕事は, $W = P\Delta V =$
1.0×10^5 Pa $\times1.0\times10^{-3}$ m$^3 = 1.0\times10^2$ J

(2) 熱力学第 1 法則より,定圧変化では $Q = \Delta U + W$ であるので,

$5.0\times10^2\ \mathrm{J} = \Delta U + 1.0\times10^2$　よって,
$\Delta U = 4.0\times10^2\ \mathrm{J}$

195 20 J

【解説】

等温変化の場合,熱力学第 1 法則より,
$Q = 0 + W$ であるので, $W = Q = 20\ \mathrm{J}$

196 50 J

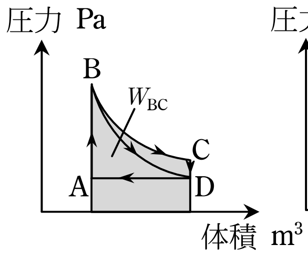
【解説】

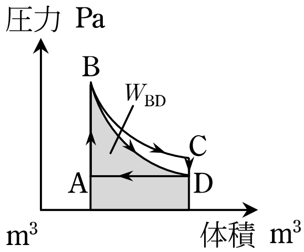
断熱変化の場合,熱力学第 1 法則より,
$0 = \Delta U + W$ であるので,
$\Delta U = -W = -(-50) = 50\ \mathrm{J}$
※W は外にする仕事であるので,気体を圧縮した場合の気体が外にする仕事は負である。

197 (1) 解説参照　(2) B→C

【解説】

(1) ボイル･シャルルの法則より圧力 P,体積 V,温度 T の関係は $\dfrac{PV}{T}=$一定 であることに注意する。また,単原子分子の場合の内部エネルギーは $U=\dfrac{3}{2}nRT$ …① で,温度が T から ΔT だけ増加したときの内部エネルギーを U' とすると,
$U' = \dfrac{3}{2}nR(T+\Delta T)$ …②　②－①より,
$U'-U = \dfrac{3}{2}nR\Delta T$ となるので,内部エネルギーの増加量は $\Delta U = \dfrac{3}{2}nR\Delta T$ となり,一般に単原子分子の場合でなくても, ΔU と ΔT は比例関係にあり,同符号となる。
A→B では体積 V が一定で,圧力 P が増加するので温度 T は増加する。よって, $\Delta T>0$, $\Delta U>0$。また,定積変化より気体は外に仕事をしないので $W=0$。さらに熱力学第 1 法則より, $Q=\Delta U+0$ で, $\Delta U>0$ より, $Q>0$ となる。
B→C では温度 T が一定であるので $\Delta T=0$, $\Delta U=0$。また,体積 V が増加し,気体は外に正の仕事をするので $W>0$。また,等温変化であるので,熱力学第 1 法則より $Q=0+W$ で, $W>0$ であるため $Q>0$ となる。
B→D では断熱変化であるので, $Q=0$。また,熱力学第 1 法則より $0=\Delta U+W$ であるので, $W=-\Delta U$ で,体積が増加しているので $W>0$, $\Delta U<0$, $\Delta T<0$ となる。
C→D では体積 V が一定で,圧力 P が減少するので温度 T は減少する。よって, $\Delta T<0$, $\Delta U<0$。また,定積変化より気体は外に仕事をしないので $W=0$。さらに熱力学第 1 法則より $Q=\Delta U+0$ で, $\Delta U<0$ より, $Q<0$ となる。D→A では圧力 P が一定で,体積 V が減少するので,温度 T も減少する。よって, $\Delta T<0$, $\Delta U<0$, $W<0$。また,熱力学第 1 法則より $Q=\Delta U+W$ で, $\Delta U<0$, $W<0$ より, $Q<0$ となる。





以上により答えは次のようになる。

	A→B	B→C	B→D	C→D	D→A
ΔT	＋	0	－	－	－
ΔU	＋	0	－	－	－
W	0	＋	＋	0	－
Q	＋	＋	0	－	－

(2) (1) より, $W>0$ となるのは B→C, B→D であり,それぞれの過程で気体が外にした仕事を W_{BC}, W_{BD} とすると,その大きさは図に示す面積に相当する。よって, $W_{BC}>W_{BD}$ となり,最も大きい過程は B→C である。

198 (1) 21 J/mol･K　(2) 8.5×10^2 J

【解説】

(1) モル比熱は $c=\dfrac{Q}{n\Delta T}$ で表され,熱を加える間に気体の体積は一定であるので,
$$C_V = \frac{Q}{n\Delta T} = \frac{170}{0.80\times10} = 21.25 \fallingdotseq 21\ \mathrm{J/mol\cdot K}$$
(2) 内部エネルギーは $U = nC_VT$ より,

$\Delta U = nC_V\Delta T = 0.80\times 21.25\times 50$

$= 8.5\times 10^2$ J

199　2.1×10^3 J

【解説】

モル比熱は $c = \dfrac{Q}{n\Delta T}$ で表され，熱を加える間に気体の圧力は一定であるので，

$C_P = \dfrac{Q}{n\Delta T}$ となる。よって，

$Q = nC_P\Delta T = 2.0\times 20.8\times 50 = 2.08\times 10^3$

$\fallingdotseq 2.1\times 10^3$ J

200　$C_V = 12.5$ J/mol·K

$C_P = 20.8$ J/mol·K

$C'_V = 20.8$ J/mol·K　$C'_P = 29.1$ J/mol·K

【解説】

$$C_V = \frac{3}{2}R = \frac{3}{2}\times 8.31 \fallingdotseq 12.5 \text{ J/mol}\cdot\text{K}$$

$$C_P = \frac{5}{2}R = \frac{5}{2}\times 8.31 \fallingdotseq 20.8 \text{ J/mol}\cdot\text{K}$$

$$C'_V = \frac{5}{2}R = \frac{5}{2}\times 8.31 \fallingdotseq 20.8 \text{ J/mol}\cdot\text{K}$$

$$C'_P = \frac{7}{2}R = \frac{7}{2}\times 8.31 \fallingdotseq 29.1 \text{ J/mol}\cdot\text{K}$$

【別解】

$C_P = C_V + R \fallingdotseq 20.8$ J/mol·K

$C'_P = C'_V + R \fallingdotseq 29.1$ J/mol·K

201　(1)　温度: 1.5×10^3 K

圧力: 5.0×10^6 Pa　(2)　$\alpha = 1.7$

【解説】

(1)　求める気体の温度を TK，圧力を PPa とすると，$TV^{1.7-1} = TV^{0.7} =$ 一定 であるので，

$(27+273)(1.0\times 10^{-3})^{0.7} = T\times(1.0\times 10^{-4})^{0.7}$

$$T = \frac{(27+273)(1.0\times 10^{-3})^{0.7}}{(1.0\times 10^{-4})^{0.7}}$$

$$= 300\times\left(\frac{1.0\times 10^{-3}}{1.0\times 10^{-4}}\right)^{0.7}$$

$= 300\times 10^{0.7} = 300\times 5.0 = 1.5\times 10^3$ K

ボイル・シャルルの法則より，

$$\frac{1.0\times 10^5\times 1.0\times 10^{-3}}{27+273} = \frac{P\times 1.0\times 10^{-4}}{1.5\times 10^3}$$

よって，$P = \dfrac{1.5\times 10^7}{300} = 5.0\times 10^6$ Pa

(2)　理想気体の状態方程式 $PV = nRT$ より，

$T = \dfrac{PV}{nR}$ となり，これを $TV^{0.7} =$ 一定 に代入すると，$\dfrac{PV}{nR}V^{0.7} = \dfrac{PV^{1.7}}{nR} =$ 一定　となり，

nR は一定であるので　$PV^{1.7} =$ 一定　となる。よって，$\alpha = 1.7$

202　熱効率:30%

捨てる熱エネルギー:毎秒 1.4×10^5 J

【解説】

W = J/s であることに注意する。1秒あたりで熱効率を考えると，

$$e = \frac{W}{Q_1} = \frac{1\text{秒でする仕事}}{1\text{秒で得た熱量}} = \frac{6.0\times 10^4\text{ J}}{2.0\times 10^5\text{ J}}$$

$= 0.3 = 30\%$

公式 $W = Q_1 - Q_2$ より，$Q_2 = Q_1 - W$

これを 1 秒あたりで考えると，

1 秒で捨てる熱量 ＝ 1 秒で得た熱量 － 1 秒でする仕事

$= 2.0\times 10^5$ J $- 6.0\times 10^4$ J $= 1.4\times 10^5$ J

203　(1)　$T_B = 2T$，$T_C = 6T$，$T_D = 3T$

(2)　$Q_1 = \dfrac{23}{2}nRT$　(3)　$Q_2 = \dfrac{19}{2}nRT$

(4)　$W = 2nRT$　(5)　$e = \dfrac{4}{23}$

【解説】

(1)　ボイル・シャルルの法則より，

$$\frac{PV}{T} = \frac{2P\cdot V}{T_B} = \frac{2P\cdot 3V}{T_C} = \frac{P\cdot 3V}{T_D}$$ であるので，

$T_B = 2T$，$T_C = 6T$，$T_D = 3T$

(2)　A→B(定積変化)，B→C(定圧変化)で気体が得た熱量をそれぞれ Q_{AB}，Q_{BC}，定積モル比熱を C_V，定圧モル比熱を C_P とすると，

$$Q_{AB} = nC_V\Delta T = n\cdot\frac{3}{2}R(T_B - T_A)$$

$$= \frac{3}{2}nR(2T - T) = \frac{3}{2}nRT$$

$Q_{BC} = nC_P\Delta T$

$$= n\cdot\frac{5}{2}R(T_C - T_B) = \frac{5}{2}nR(6T - 2T)$$

$= 10nRT$ よって,

$Q_1 = Q_{AB} + Q_{BC}$

$= \dfrac{3}{2}nRT + 10nRT = \dfrac{23}{2}nRT$

【別解】

$Q_{AB} = \Delta U + 0 = \dfrac{3}{2}nR(T_B - T_A)$

$= \dfrac{3}{2}nR(2T - T) = \dfrac{3}{2}nRT$

$Q_{BC} = \Delta U + W$

$= \dfrac{3}{2}nR(T_C - T_B) + 2P(V_C - V_B)$

$= \dfrac{3}{2}nR(6T - 2T) + 2P(3V - V)$

$= \dfrac{3}{2}nR \cdot 4T + 2P \cdot 2V = 6nRT + 4PV$

理想気体の状態方程式 $PV = nRT$ より,

$Q_{BC} = 6nRT + 4nRT = 10nRT$ よって,

$Q_1 = Q_{AB} + Q_{BC}$

$= \dfrac{3}{2}nRT + 10nRT = \dfrac{23}{2}nRT$

(3) C→D→A での過程は温度が減少しているので熱は捨てられたことになる。

C→D(定積変化), D→A(定圧変化)で気体が得た熱量をそれぞれ Q_{CD}, Q_{DA}, 定積モル比熱を C_V, 定圧モル比熱を C_P とすると,

$Q_{CD} = nC_V\Delta T = n \cdot \dfrac{3}{2}R(T_D - T_C)$

$= \dfrac{3}{2}nR(3T - 6T) = -\dfrac{9}{2}nR$

$Q_{DA} = nC_P\Delta T$

$= n \cdot \dfrac{5}{2}R(T_A - T_D) = \dfrac{5}{2}nR(T - 3T)$

$= -5nR$ よって,

$Q_2 = |Q_{CD} + Q_{DA}| = \left|-\dfrac{9}{2}nR - 5nRT\right|$

$= \dfrac{19}{2}nRT$

【別解】

$Q_{CD} = \Delta U + 0 = \dfrac{3}{2}nR(T_D - T_C)$

$= \dfrac{3}{2}nR(3T - 6T) = -\dfrac{9}{2}nR$

$Q_{DA} = \Delta U + W$

$= \dfrac{3}{2}nR(T_A - T_D) + P(V_A - V_D)$

$= \dfrac{3}{2}nR(T - 3T) + P(V - 3V)$

$= -3nRT - 2PV$

理想気体の状態方程式 $PV = nRT$ より,

$Q_{DA} = -3nRT - 2nRT = -5nRT$ よって,

$Q_2 = |Q_{CD} + Q_{DA}|$

$= \left|-\dfrac{9}{2}nR - 5nRT\right| = \dfrac{19}{2}nRT$

(4) A→B, B→C, C→D, D→A の過程での気体が外にした仕事をそれぞれ,

$W_{AB}, W_{BC}, W_{CD}, W_{DA}$ とすると,

$W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA}$

$= 0 + 2P(3V - V) + 0 + P(V - 3V)$

$= 4PV - 2PV = 2PV$

理想気体の状態方程式 $PV = nRT$ より,

$W = 2nRT$

長方形ABCDの面積

$= P \times 2V = 2PV = 2nRT$

となり,気体が正味外にする仕事 W は長方形 ABCD の面積で求められる。

【別解】

$W = Q_1 - Q_2$ より, (2) ,(3) から,

$W = \dfrac{23}{2}nRT - \dfrac{19}{2}nRT = 2nRT$

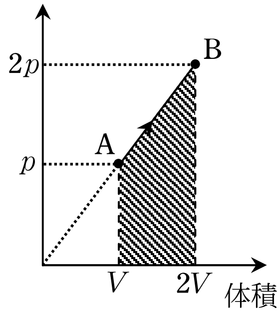
(5) $e = \dfrac{W}{Q_1} = \dfrac{2nRT}{\dfrac{23}{2}nRT} = \dfrac{4}{23}$ (約 17%)

204 (1) $W = \dfrac{3}{2}pV$ (2) $\Delta U = \dfrac{9}{2}pV$

(3) $Q = 6pV$ (4) $c = 2R$

【解説】 圧力 Pa

(1)



気体が外部にする仕事 W は図の台形の面積に相当するので,

$W = \frac{1}{2}(p+2p)(2V-V) = \frac{3}{2}pV$

(2) 状態 A,B での温度を T_A , T_B とすると,

$\Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T = \frac{3}{2}R(T_B - T_A)\cdots$①

また, 理想気体の状態方程式より,

A: $pV = RT_A\cdots$②

B: $2p\cdot 2V = RT_B$ より, $4pV = RT_B\cdots$③

③−②より　$3pV = R(T_B - T_A)$

よって, $T_B - T_A = \frac{3pV}{R}\cdots$④ となり, これを

①に代入して, $\Delta U = \frac{3}{2}R\cdot\frac{3pV}{R} = \frac{9}{2}pV$

(3) 熱力学第１法則および(1) ,(2) の結果より,

$Q = \Delta U + W = \frac{9}{2}pV + \frac{3}{2}pV = 6pV$

(4) この変化におけるモル比熱は,

$c = \frac{Q}{n\Delta T} = \frac{Q}{T_B - T_A}$ で, (3) より,

$Q = 6pV$,

④より, $T_B - T_A = \frac{3pV}{R}$ であるので,

$c = 6pV \div \frac{3pV}{R} = 6pV \times \frac{R}{3pV} = 2R$

205 (1) $\frac{1}{8}$倍　(2) $PV^{\frac{5}{3}} =$ 一定

【解説】

(1) 断熱圧縮することにより, (温度, 体積) が (T, V) →($4T, V'$) と変化したとすると,

$TV^{\frac{2}{3}} = 4TV'^{\frac{2}{3}}$ より, $V'^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}V^{\frac{2}{3}}$

両辺を３乗すると,

$V'^2 = \left(\frac{1}{4}V^{\frac{2}{3}}\right)^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 V^{\frac{2}{3}\times 3} = \frac{1}{64}V^2$

よって, $V' = \sqrt{\frac{1}{64}V^2} = \frac{1}{8}V$ となるので体積を $\frac{1}{8}$ 倍にすればよい。

(2) 理想気体の状態方程式 $PV = nRT$ より,

$T = \frac{PV}{nR}$ となり, これを $TV^{\frac{2}{3}} =$ 一定 に代入すると, $\frac{PV}{nR}V^{\frac{2}{3}} = \frac{PV^{\frac{5}{3}}}{nR} =$ 一定　となり, nR は一定であるので, $PV^{\frac{5}{3}} =$ 一定　となる。

206 (1) $Q_{AB} = nC_P(T_2 - T_1)$,

$W_{AB} = P_1(V_2 - V_1)$

(2) $Q_{AC} = nC_V(T_2 - T_1)$

(3) $\Delta U_{AC} = nC_V(T_2 - T_1)$

(4) $\Delta U_{CB} = 0$　(5) ① $nC_V(T_2 - T_1)$

② $C_V + R$　③ マイヤー

【解説】

(1) A→B は定圧変化であるので, この間に気体が得た熱量は,

$Q_{AB} = nC_P\Delta T = nC_P(T_2 - T_1)$

また, 気体が外にした仕事は,

$W_{AB} = P\Delta V = P_1(V_2 - V_1)$

(2) A→C は定積変化であるので, この間に気体が得た熱量は,

$Q_{AC} = nC_V\Delta T = nC_V(T_2 - T_1)$

(3) 定積変化の場合は熱力学第1法則より, $Q_{AC} = \Delta U_{AC}$ であるので, (2) の結果より,

$\Delta U_{AC} = Q_{AC} = nC_V(T_2 - T_1)$

(4) C→B は等温変化であるので, この過程での温度変化は $\Delta T_{CB} = 0$　内部エネルギーは温度に比例するので $\Delta T_{CB} = 0$ なら $\Delta U_{CB} = 0$

※内部エネルギーの公式 $U = nC_VT$ より,

$\Delta U = nC_V\Delta T$ がいえる。よって,

$\Delta U_{CB} = nC_V\Delta T_{CB} = 0$

(5) $\Delta U_{ACB} = \Delta U_{AC} + \Delta U_{CB}$

$= nC_V(T_2 - T_1) + 0 = \underline{nC_V(T_2 - T_1)}\cdots$①

$Q_{AB} = \Delta U_{AB} + W_{AB}$ に (1) の結果および①を代入すると,

$nC_P(T_2 - T_1)$

$= nC_V(T_2 - T_1) + P_1(V_2 - V_1)\cdots$(A)

理想気体の状態方程式より,

$P_1V_2 = nRT_2$,

$P_1V_1 = nRT_1$ で, これらの辺々を引くと

$P_1(V_2 - V_1) = nR(T_2 - T_1)$ であるので,

(A)は, $nC_P(T_2 - T_1)$

$= nC_V(T_2 - T_1) + nR(T_2 - T_1)$

この両辺を$n(T_2-T_1)$で割ると，
$C_P=C_V+R$ …② となり，これを
③マイヤーの関係という。

207 (1) T_B, T_C, T_A

(2) $Q_1=\dfrac{3}{2}V_1(p_2-p_1)$

(3) $Q_2=\dfrac{5}{2}p_1(V_2-V_1)$ (4) $W=Q_1-Q_2$

(5) $\alpha=\dfrac{5p_1(V_2-V_1)}{3V_1(p_2-p_1)}$

【解説】

(1) A→B では，ボイル･シャルルの法則より，
$\dfrac{PV}{T}=$一定 で，体積Vが一定で，圧力Pが増加するので，温度Tは増加する。
よって$T_A<T_B$…①
B→C では，
$$0=\Delta U_{BC}+W_{BC}=\frac{3}{2}\cdot 1\cdot R\Delta T_{BC}+W_{BC}$$
であるので，$\dfrac{3}{2}R\Delta T_{BC}=-W_{BC}$
この過程では体積が増加し$W_{BC}>0$なので$\Delta T_{BC}<0$となり，温度 T は減少する。よって，
$T_C<T_B$…②
C→A では$\dfrac{PV}{T}=$一定 で，圧力 P は一定で，体積 V は減少するので，温度 T は減少する。
よって，$T_A<T_C$…③
①,②,③より，$T_A<T_C<T_B$ となり，温度が高い順に並べるとT_B, T_C, T_Aとなる。

(2) A→B では定積変化であるので，
$$Q_1=nC_V\Delta T_{AB}=\frac{3}{2}R(T_B-T_A)\cdots④$$
理想気体の状態方程式より，$p_2V_1=RT_B$，$p_1V_1=RT_A$ となり，これらの辺々を引くと，
$V_1(p_2-p_1)=R(T_B-T_A)$…⑤
④,⑤より，$R(T_B-T_A)$を消去すると，
$$Q_1=\frac{3}{2}V_1(p_2-p_1)$$

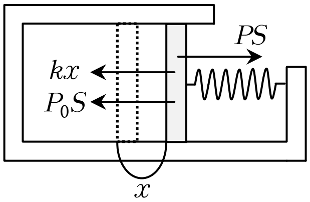
(3) 放出した熱量をQ_2とすると，吸収した熱量は$-Q_2$であるので，C→A の定圧変化では，
$$-Q_2=nC_P\Delta T=\frac{5}{2}R(T_A-T_C)\cdots⑥$$
理想気体の状態方程式より$p_1V_1=RT_A$，
$p_1V_2=RT_C$
が成り立ち，これらの辺々を引くと，
$p_1(V_1-V_2)=R(T_A-T_C)$…⑦
⑥,⑦より，$R(T_A-T_C)$を消去すると，
$$-Q_2=\frac{5}{2}p_1(V_1-V_2)$$ よって，
$$Q_2=\frac{5}{2}p_1(V_2-V_1)$$

(4) A→B ではQ_1の熱を吸収し，B→C(断熱変化) では熱の吸収は 0，C→A ではQ_2の熱を放出している。
（1 サイクルで気体が正味外にする仕事）
＝（気体が吸収した熱量）－（捨てる熱量）
であるので，$W=Q_1-Q_2$となる。
※熱力学第 1 法則より，
A→B(定積変化) ：$Q_1=\Delta U_{AB}$…(a)
B→C(断熱変化) ：$0=\Delta U_{BC}+W_{BC}$…(b)
C→A(定圧変化) ：$-Q_2=\Delta U_{CA}+W_{CA}$…(c)
(a)＋(b)＋(c) より，Q_1-Q_2
$=\Delta U_{AB}+\Delta U_{BC}+\Delta U_{CA}+W_{BC}+W_{CA}$…(d)
このサイクルで気体が正味外にする仕事は
$W=W_{BC}+W_{CA}$で，
$\Delta U_{AB}+\Delta U_{BC}+\Delta U_{CA}$
$=C_V(T_B-T_A)+C_V(T_C-T_B)$
$+C_V(T_A-T_C)=0$
であるので，(d) より$Q_1-Q_2=W$ が成り立つ。
よって，$W=Q_1-Q_2$

(5) $e=\dfrac{W}{Q_1}=\dfrac{Q_1-Q_2}{Q_1}=1-\dfrac{Q_2}{Q_1}$
$$=1-\frac{\frac{5}{2}p_1(V_2-V_1)}{\frac{3}{2}V_1(p_2-p_1)}=1-\frac{5p_1(V_2-V_1)}{3V_1(p_2-p_1)}$$
よって，$\alpha=\dfrac{5p_1(V_2-V_1)}{3V_1(p_2-p_1)}$

208 (1) 圧力: 1.2×10^5 Pa，
体積: 7.0×10^{-3} m^3 温度 420 K
(2) 内部エネルギーの変化: 6.0×10^2 J，
仕事: 1.1×10^2 J，熱量: 7.1×10^2 J

【解説】



(1) ばね定数を k，ばねの縮みを x，ピストンの断面積を S，加熱前の気体の温度，圧力，体積をそれぞれ，T_0，P_0，V_0，加熱後の気体の温度，圧力，体積をそれぞれ，T，P，V とする。加熱後のつり合いの式は，

$kx+P_0S=PS$　であるので，

$$P=\frac{kx+P_0S}{S}=\frac{kx}{S}+P_0$$

$$=\frac{5.0\times10^2\times0.2}{5.0\times10^{-3}}+1.0\times10^5=1.2\times10^5\ \mathrm{Pa}$$

$$V=V_0+Sx=6.0\times10^{-3}+5.0\times10^{-3}\times0.2$$

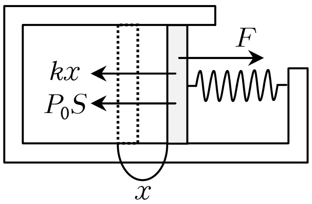
$$=7.0\times10^{-3}\ \mathrm{m^3}$$

ボイル·シャルルの法則より，$\dfrac{P_0V_0}{T_0}=\dfrac{PV}{T}$

であるので，

$$T=\frac{T_0PV}{P_0V_0}=\frac{300\times1.2\times10^5\times7.0\times10^{-3}}{1.0\times10^5\times6.0\times10^{-3}}$$

$$=420\,\mathrm{K}$$



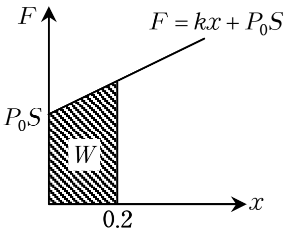
(2) 気体の物質量を n mol，内部エネルギーの変化を ΔU，気体が外部にした仕事を W とすると，理想気体の状態方程式より，$P_0V_0=nRT_0$　であるので，$n=\dfrac{P_0V_0}{RT_0}$　よって，

$$\Delta U=\frac{5}{2}nR\Delta T=\frac{5}{2}\times\frac{P_0V_0}{RT_0}\times R(T-T_0)$$

$$=\frac{5}{2}\cdot\frac{P_0V_0}{T_0}(T-T_0)$$

$$=\frac{5}{2}\times\frac{1.0\times10^5\times6.0\times10^{-3}}{300}\times(420-300)$$

$$=6.0\times10^2\ \mathrm{J}$$



ばねが x m 縮んだときに内部の気体がピストンを押す力は，

$F=kx+P_0S$ となり，x が 0～0.2 m 動く間に気体がする仕事は，図の斜線部分の面積に相当するので，

$$W=\int_0^{0.2}(kx+P_0S)\,\mathrm{d}x$$

$$=\left[\frac{1}{2}kx^2+P_0Sx\right]_0^{0.2}=\frac{1}{2}\times5.0\times10^2\times0.04$$

$$+1.0\times10^5\times5.0\times10^{-3}\times0.2$$

$$=0.1\times10^2+1.0\times10^2=1.1\times10^2\ \mathrm{J}$$

内部の気体が吸収した熱量を Q とすると，熱力学第 1 法則より，

$$Q=\Delta U+W=6.0\times10^2+1.1\times10^2$$

$$=7.1\times10^2\ \mathrm{J}$$

209 (1) 振動数:2.5 Hz　周期:0.40 s

(2) 振動数:4.0 Hz　速さ:5.6 m

【解説】

(1) $v=f\lambda$ より，$5.0=f\times2.0$　よって，

$$f=2.5\,\mathrm{Hz}\qquad T=\frac{1}{f}=\frac{1}{2.5}=0.40\,\mathrm{s}$$

(2) $f=\dfrac{1}{T}=\dfrac{1}{0.25}=4.0\,\mathrm{Hz}$　$v=f\lambda$ より，

$$v=4.0\times1.4=5.6\,\mathrm{m/s}$$

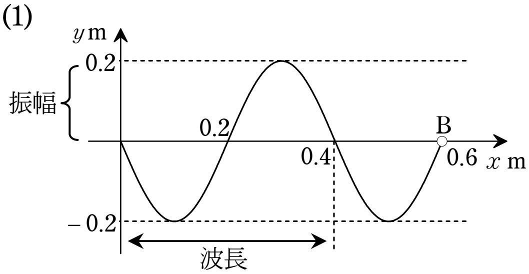
210 (1) $A=0.2$ m，$\lambda=0.4$ m

(2) $v=0.5$ m/s，$T=0.8$ s

(3) 1.2 s　(4) 負の向き　(5) ウ

【解説】

(1)



波長と振幅は図に示す部分であるので，

$A=0.2$ m，$\lambda=0.4$ m

(2) 0.2 s で波の先端が $x=0.5$ から $x=0.6$ になったので，

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{0.6-0.5}{0.2}=0.5\ \mathrm{m/s}$$

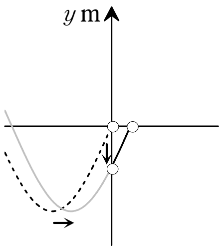
$$v=\frac{\lambda}{T}\text{ より，}T=\frac{\lambda}{v}=\frac{0.4}{0.5}=0.8\ \mathrm{s}$$

(3) 波の先端は初め原点にあって，ある時間が経過した後に B の位置に達したので，その経

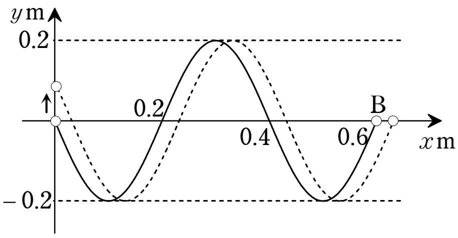
過時間を t とすると，

$$t=\frac{\text{距離}}{\text{速さ}}=\frac{0.6}{0.5}=1.2\ \text{s}$$

(4) 右図のように，先端が原点に来るように点線の波を左に平行移動させ，この波を進行方向にわずかに進めると，原点の媒質は負の方向に移動することがわかる。



(5)



実線の波の時刻から少し時間がたつと，図の点線のような波になるので，原点にある媒質は，次の瞬間 y 軸の正の方へ移動する。原点の媒質の y 座標は，4 分の 1 周期ごとに，$y=0 \to y=0.2 \to y=0 \to y=-0.2 \to y=0$ …と変化していく。ここで (2) より，$T=0.8\text{s}$ で，$\frac{1}{4}T=0.2\text{s}$ となり，$\frac{3}{4}T=0.6\text{s}$ となるので，0.6 s 後は 4 分の 3 周期後となる。よって，媒質の変位は $y=-0.2$ となる。

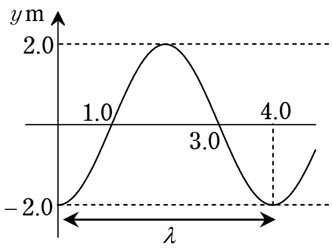
211 (1) $\lambda=4.0\text{m}$，$v=2.5\text{s}$，$T=1.6\text{s}$

(2) $x=0,\ 2.0,\ 4.0,\ 6.0$　(3) $x=3.0,\ 7.0$

(4) $x=5.0$　(5) $x=3.0,\ 7.0$

(6) $\theta=\frac{5}{4}\pi t$，$y=2.0\sin\frac{5}{4}\pi t$

【解説】



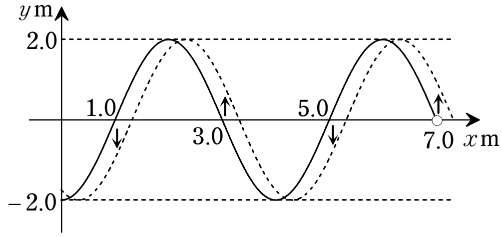
(1) 波長は山と山，谷と谷の間の距離で求められるので，図より $\lambda=4.0\text{m}$

波の先端は 2.8 s で 0 m から 7.0 m に移動したので，

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{7.0\text{m}}{2.8\text{s}}=2.5\text{m/s}$$ さらに，$v=\frac{\lambda}{T}$ より，$T=\frac{\lambda}{v}=\frac{4.0\text{m}}{2.5\text{m/s}}=1.6\text{s}$

(2) 単振動する物体は，折り返すときに速さが 0 になる。よって，速さが 0 の媒質の位置は，変位の大きさが一番大きい媒質になる。その位置は図より $x=0,\ 2.0,\ 4.0,\ 6.0$。

(3)



単振動する物体は，振動の中心で速さが最大になる。よって速さが最大の媒質の位置は，変位が 0 の位置になる。さらに，図のように，少し時間が経過したときの波(点線) を描くと，変位が 0 で，速さが正である媒質の位置は $x=3.0,\ 7.0$ となる。

(4) 同位相の媒質は，変位が常に同じまま振動する媒質である。よって，$x=1.0$ の媒質と同位相の媒質の位置は，図より $x=5.0$ となる。

(5) 逆位相の媒質は，常に変位の大きさが同じで，符号が逆のまま振動する媒質である。よって，$x=1.0$ の媒質と逆位相の媒質の位置は，図より $x=3.0,\ 7.0$ となる。

(6) 周期を T とすると，時刻 t での位相は $2\pi\frac{t}{T}$ と表すことができる。よって，

$$\theta=2\pi\frac{t}{T}=2\pi\times\frac{t}{1.6}=\frac{5}{4}\pi t\ \text{rad}$$

この結果を用いて，

$$y=2.0\sin\theta=2.0\sin\frac{5}{4}\pi t$$

212 ① $4\sin 2\pi\frac{t}{2}$　周期：2

② $\sin 2\pi\frac{t}{4\pi}$　周期：4π

【解説】

① $y=4\sin 2\pi\times\frac{1}{2}t=4\sin 2\pi\frac{t}{2}$

② $y=\sin\frac{1}{2}t=\sin 2\pi\times\frac{1}{2\pi}\times\frac{1}{2}t$

$$= \sin 2\pi \frac{t}{4\pi}$$

213 (1)　$y = 0.3\sin 4\pi t$　$\omega = 4\pi$

(2)　$y = 0.3\sin 4\pi\left(t - \dfrac{x}{8}\right)$

【解説】

(1)角振動数は,

$$\omega = \frac{1\text{周の角}}{\text{角が1周するのにかかる時間}} = \frac{2\pi}{T}$$

と表されることに注意する。この振動は単振動であるので,

$$y = A\sin\omega t = A\sin 2\pi\frac{t}{T}$$

$$= 0.3\sin 2\pi\cdot\frac{t}{0.5} = 0.3\sin 4\pi t$$

$A\sin\omega t = 0.3\sin 4\pi t$ であることから係数を比較して $\omega = 4\pi$ となる。

(2) $y = A\sin\dfrac{2\pi}{T}\left(t - \dfrac{x}{v}\right)$

$$= 0.3\sin\frac{2\pi}{0.5}\left(t - \frac{x}{8.0}\right) = 0.3\sin 4\pi\left(t - \frac{x}{8}\right)$$

214 (1)　$A = 0.5\,\mathrm{m}$, $T = 4.0\,\mathrm{s}$, $\lambda = 2.0\,\mathrm{m}$, $v = 0.5\,\mathrm{m/s}$　(2) ,(3)　解説参照

【解説】

(1)　$y = A\sin\dfrac{2\pi}{T}\left(t - \dfrac{x}{v}\right) = A\sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\lambda}\right)$

$= 0.5\sin 2\pi\left(\dfrac{t}{4} - \dfrac{x}{2}\right)$　であるので,

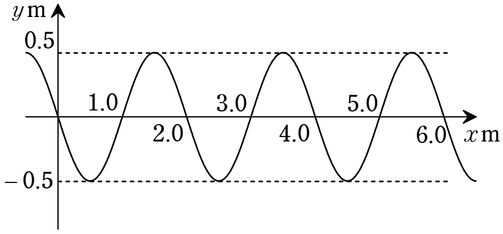
$A = 0.5\,\mathrm{m}$, $T = 4.0\,\mathrm{s}$, $\lambda = 2.0\,\mathrm{m}$,

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{2.0}{4.0} = 0.5\,\mathrm{m/s}$$

(2)　$t = 0$ のとき,

$$y = 0.5\sin 2\pi\left(-\frac{x}{2}\right) = 0.5\sin(-\pi x)$$

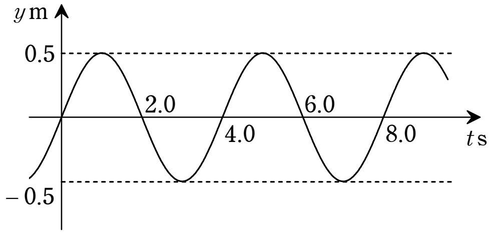
$= -0.5\sin\pi x$　となるのでグラフは次のようになる。



(3)　$x = 0$ のとき,

$$y = 0.5\sin 2\pi\left(\frac{t}{4}\right) = 0.5\sin\frac{\pi}{2}t$$

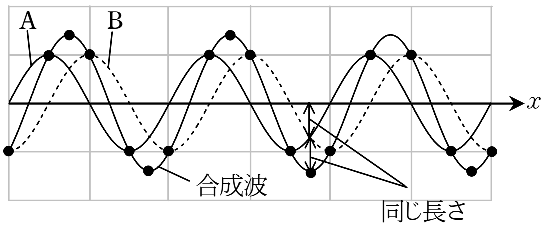
となるのでグラフは次のようになる。



215 解説参照

【解説】

図のように確実に通る点を打ち,対称性を考えて,なめらかな曲線で結んでいく。



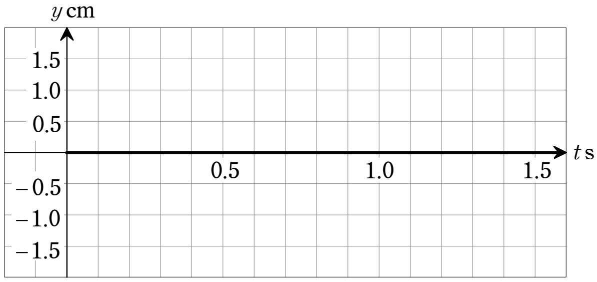
216 解説参照

【解説】

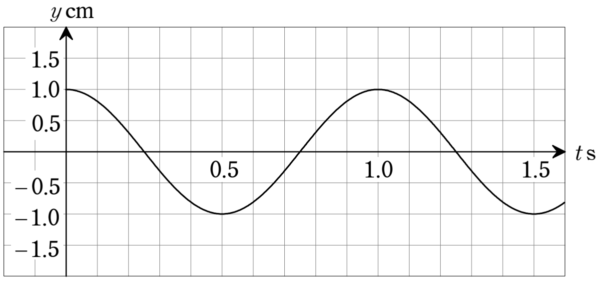
①　$|\mathrm{AP} - \mathrm{BP}| = |2.0 - 5.0| = 3.0$

波長は $\lambda = 2.0$ であるので,

$|\mathrm{AP} - \mathrm{BP}| = 2.0 + 1.0 = \lambda + \dfrac{1}{2}\lambda$　よって点 P は弱めあう点であるので,波は打ち消し合ってほとんど振動をしない点になる。よって,グラフは次のようになる。



② A, Bの振動が逆位相になると, Pは強め合う点になる。AP = 2.0 = λで, APの長さは1波長分であるので, 時刻0 sで波源Aの変位が最大のとき, Aから出た波は点 P でも最大となる。よって時刻0 sにおける点Pの変位は重ね合わせの原理によって, $0.5+0.5=1.0\,\mathrm{cm}$ となる。また, A, B から出た波の周期はともに 1.0 s で, 波の独立性により, 波が重なり合ってもその周期は変わらない。以上のことからグラフは次のようになる。



217 (1),(2) 解説参照

(3) 反射角:60°, 屈折角:26°, $\lambda_1 : \lambda_2 = 2 : 1$

【解説】

(1) ①Aからの素源波はBCの長さだけ広がるので, 中心がAでBCの長さを半径とする半円になる。

② 反射波の波面はCからこの半円に引いた接線である。

③ Aと②の接点を通る直線と, Cを通りこれと平行な直線が反射線である。

(2) ①媒質1, 媒質2での平面波の速さをそれぞれ, v_1, v_2とすると, BC = $v_1 t$ m であり, Aから出る素源波は t s 後に$v_2 t$ m 広がる。屈折の法則より, $2.0=\dfrac{v_1}{v_2}$ より, $v_2=\dfrac{v_1}{2.0}$

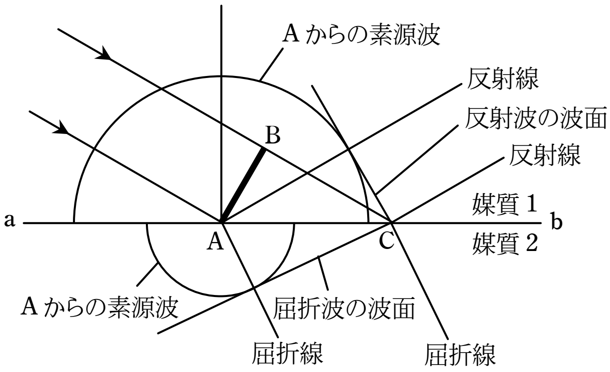
であるので, 両辺をt倍すると,

$$v_2 t=\frac{v_1 t}{2.0}=\frac{\mathrm{BC}}{2}$$

よって, Aからの素源波は, BCの半分の長さを半径とする半円になる。

② 屈折波の波面は, Cからこの半円に引いた接線である。

③ Aから接点に引いた直線および, Cを通り, これと平行な直線が屈折線である。



(3) 反射の法則により, 入射角＝反射角　であるので, 反射角は 60°である。屈折の法則より,

$$2.0=\frac{\sin 60^\circ}{\sin\theta_2}\quad よって,$$

$$\sin\theta_2=\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1.73}{4}=0.4325$$

三角比表より, $\theta_2 \fallingdotseq 26^\circ$

屈折の法則より, $2.0=\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$ より, $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}=\dfrac{2}{1}$

よって, $\lambda_1 : \lambda_2 = 2 : 1$

218 (1) $\lambda=4.0\,\mathrm{m}$, $v=8.0\,\mathrm{m/s}$

(2) $y=-0.3\,\mathrm{m}$

(3) 原点と同位相: P_7, P_2と逆位相: P_6

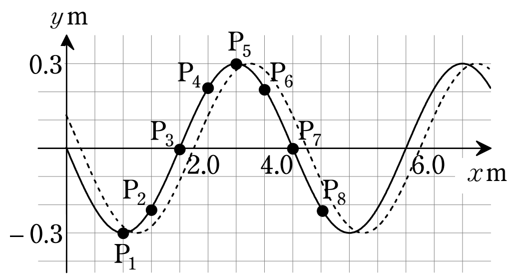
(4) 0になっている点: P_1, P_5

最大になっている点: P_3, P_7

(5) イ　(6) $y=0.3\sin 4\pi t$

(7) $y=0.3\sin 4\pi\left(t-\dfrac{x}{8.0}\right)$

【解説】



(1) 図より, $\lambda=4.0\,\mathrm{m}$

$v=f\lambda=2.0\times4.0=8.0\,\mathrm{m/s}$

(2) 周期を T s とすると,

$$T=\frac{1}{f}=\frac{1}{2.0}=0.5\,\text{s}$$

両辺を 6 倍すると, $6T=3.0\,\text{s}$ 。　よって 3 秒後は 6 周期後となるので, 変位は $t=0$ と同じ $y=-0.3\,\text{m}$

(3) グラフを x 軸の正の向きに少し平行移動させると, 原点の媒質の速度の向きは, 時刻 $t=0$ において, y 軸の正の向きである。よって, 原点と同位相の点は, $y=0$ で, 速度の向きが y 軸の正の向きである P_7 となる。また点 P_2 の速度の向きは時刻 $t=0$ において, y 軸の負の向きである。よって, この点と逆位相の点は, $t=0$ において変位の絶対値が等しく逆符号で, 速度の向きが y 軸の正の向きである P_6 となる。

(4) 単振動する物体は折り返すときに速さが 0 となり, 振動の中心にあるときに速さが最大となる。よって速さが 0 となっている点は P_1 と P_5, 速さが最大となっている点は P_3 と P_7 となる。

(5) P_7 は時刻 $t=0$ で $y=0$ であり, グラフを x 軸の正の向きに少し平行移動させると, P_7 は y 軸の正の向きに移動する。よって, y–t グラフは(イ) に相当する。

(6) 原点の媒質は $t=0$ の直後に y 軸の正の向きに移動することに注意する。

$$y=A\sin 2\pi\frac{t}{T}=0.3\sin 2\pi\frac{t}{0.5}$$
$$=0.3\sin 4\pi t$$

(7) $$y=A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v}\right)$$
$$=0.3\sin\frac{2\pi}{0.5}\left(t-\frac{x}{8.0}\right)=0.3\sin 4\pi\left(t-\frac{x}{8.0}\right)$$

219 (1) k (2) $y=2\cos 4\pi t$　グラフは解説参照

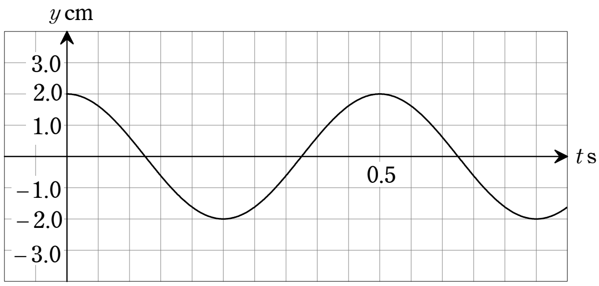
(3) 解説参照

【解説】

(1) i は山と山, l は谷と谷が重なる点なので, 媒質は $t=0$ で止まっている。h,m は山と谷が重なる点なので, ほとんど振動しない点である。j は少し時間がたつと, S_1 からの谷, S_2 からの山が近づくので, ほとんど振動しない点である。n は少し時間がたつと, S_1 からの山, S_2 からの山が近づくので, 上向きに動いている。k は少し時間がたつと, S_1 からの谷, S_2 からの谷が近づくので, 下向きに動いている。

(2) 位置 i では $t=0$ で山と山が重なり, 強め合う点である。また, S_1, S_2 での単振動の振幅は $A=1.0\,\text{cm}$, 周期は $T=0.5\,\text{s}$ であるので, i での変位 y は重ね合わせの原理によって,

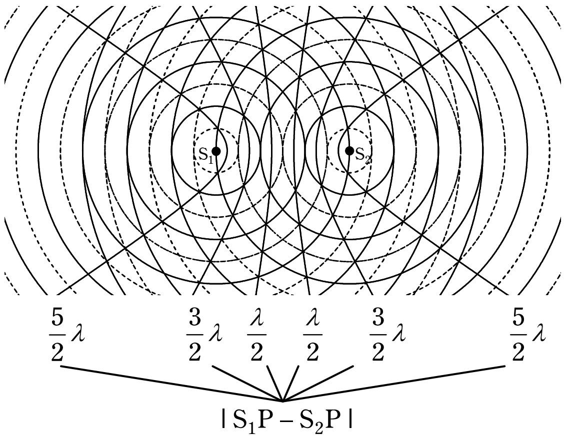
$$y=A\cos 2\pi\frac{t}{T}+A\cos 2\pi\frac{t}{T}$$
$$=2A\cos 2\pi\frac{t}{T}$$
$$=2\times 1.0\cos 2\pi\frac{t}{0.5}=2\cos 4\pi t$$



(3) 弱めあう点を P とすると,

$$|S_1P-S_2P|=\frac{\lambda}{2},\frac{3}{2}\lambda,\frac{5}{2}\lambda$$

を満たす点 P の軌跡は次のようになる。

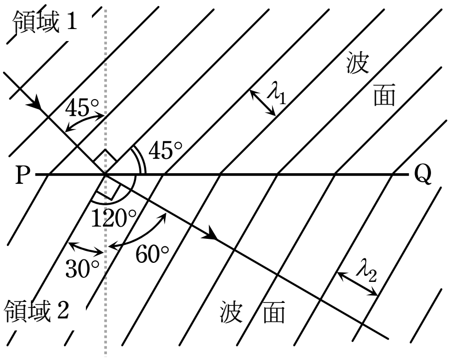


220 (1) $i=45°$, $r=60°$　(2) 0.82

(3) 4.9×10^{-2} m　(4) 0.98 m/s

(5) 5.0×10^{-2} s　(6) 0.67

【解説】



(1) 図より入射角は 45°, 屈折角は 60° となる。

(2) 屈折の法則より,

$$n = \frac{\sin 45°}{\sin 60°} = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{6}}{3} \fallingdotseq \frac{2.45}{3} \fallingdotseq 0.82$$

(3) 屈折の法則より, $n = \dfrac{\sqrt{6}}{3} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$ 　よって,

$$\lambda_2 = \lambda_1 \times \frac{3}{\sqrt{6}} = 0.04 \times \frac{\sqrt{6}}{2} = 0.02\sqrt{6}$$

$$= 0.049 \fallingdotseq 4.9 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}$$

(4) 屈折の法則より, $n = \dfrac{\sqrt{6}}{3} = \dfrac{v_1}{v_2}$ 　よって,

$$v_2 = v_1 \times \frac{3}{\sqrt{6}} = 0.80 \times \frac{\sqrt{6}}{2} = 0.4\sqrt{6}$$

$$= 0.98\ \mathrm{m/s}$$

(5) $T = \dfrac{\lambda_2}{v_2} = \dfrac{0.02\sqrt{6}}{0.4\sqrt{6}} = \dfrac{1}{20} = 5.0 \times 10^{-2}\ \mathrm{s}$

(6) 屈折の法則より, $n = \dfrac{\sqrt{6}}{3} = \dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{\sqrt{h_1 k}}{\sqrt{h_2 k}}$

両辺を 2 乗して整理すると $\dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{2}{3} \fallingdotseq 0.67$

221 (1) 8.0　(2) 解説参照　(3) エ

(4) $v = 2.0\ \mathrm{m/s}, T = 4.0\ \mathrm{s}$

(5) $y = -0.3\sin\dfrac{\pi t}{2}$ (グラフは解説参照)

(6) $y = -0.3\sin\dfrac{\pi}{2}\left(t - \dfrac{x}{2.0}\right)$

【解説】

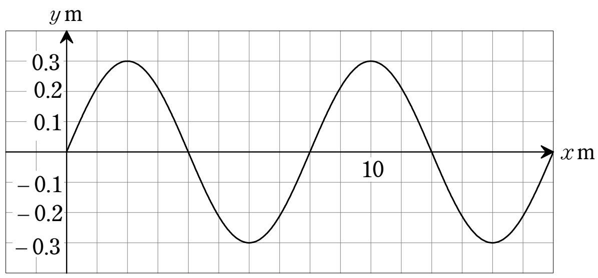
(1) $y = 0.3\sin\dfrac{\pi x}{4.0} = 0.3\sin 2\pi \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{x}{4.0}$

$$= 0.3\sin 2\pi\frac{x}{8.0}$$

(2) $y = 0.3\sin\dfrac{\pi x}{4.0}$ より, 振幅は 0.3 m である。また, 位相が 2π になるときの x を求めると, $\dfrac{\pi x}{4.0} = 2\pi$ より, $x = 8.0$ となる。よって変位 y は次の表のように変化していく。

x	0	…	4.0	…	8.0
位相	0	…	π	…	2π
y	0		0		0

このことからグラフは次のようになる。



(3) (2)のグラフより k の値は波長と一致している。

(4) (1) のグラフより波長は $\lambda = 8.0\ \mathrm{m}$ であるので, $v = \dfrac{進む距離}{時間} = \dfrac{\lambda/4}{1.0} = \dfrac{8.0}{4} = 2.0\ \mathrm{m/s}$

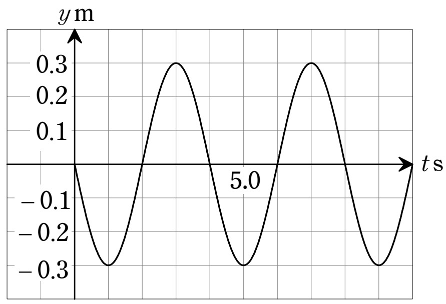
周期は $T = \dfrac{\lambda}{v} = \dfrac{8.0}{2.0} = 4.0\ \mathrm{s}$

(5) 原点での媒質は $t = 0$ の直後, 負に変位するので,

$$y = -A\sin 2\pi\frac{t}{T} = -0.3\sin 2\pi \cdot \frac{t}{4.0}$$

$$= -0.3\sin\frac{\pi t}{2}$$

周期は 4.0 s, 振幅は 0.3 m であることに注意すると, グラフは次のようになる。



(6) 原点の媒質の変位は $y=-A\sin 2\pi\dfrac{t}{T}$ と表され，位置 x での変位は，原点の媒質の $\dfrac{x}{v}$ s 過去の変位と同じであり，

$y=-A\sin\dfrac{2\pi}{T}\left(t-\dfrac{x}{v}\right)$ と表される。

$A=0.3$, $T=4.0$, $v=2.0$ であるので，

$y=-0.3\sin\dfrac{2\pi}{4.0}\left(t-\dfrac{x}{2.0}\right)$

$=-0.3\sin\dfrac{\pi}{2}\left(t-\dfrac{x}{2.0}\right)$ となる。

222 (1) 344 m/s　(2) 1.7×10^{3} m
(3) 2.0×10^{-3} s　(4) 6.9×10^{-1} m

【解説】

(1) $V=332+0.6\times20=344\,\mathrm{m/s}$

(2) 距離＝速さ×時間＝ 344×5.0
$=1720\fallingdotseq1700=1.7\times10^{3}\,\mathrm{m}$

(3) 周期を T s, 振動数を f Hz とすると，

$T=\dfrac{1}{f}=\dfrac{1}{500}=2.0\times10^{-3}\,\mathrm{s}$

(4) 波長を λ m，音速を V m/s とすると，
$V=f\lambda$ より，

$\lambda=\dfrac{V}{f}=\dfrac{344}{500}=0.688\fallingdotseq0.69=6.9\times10^{-1}\,\mathrm{m}$

223 578 m

【解説】

船から崖までの距離を x m とすると，船から崖に向かう音の速さは $340+10=350\,\mathrm{m/s}$，崖から船に向かう音の速さは，
$340-10=330\,\mathrm{m/s}$ であるので，

時間＝距離÷速さより，$3.4=\dfrac{x}{350}+\dfrac{x}{330}$

これを解くと，$x=577.5=578\,\mathrm{m}$

224 1.5×10^{3} m/s

【解説】

水中での音速を V m/s とすると，屈折の法則より，$0.23=\dfrac{340}{V}$　よって，

$V=\dfrac{340}{0.23}\fallingdotseq1478\fallingdotseq1.5\times10^{3}\,\mathrm{m/s}$

225 (1) 1.0 m　(2) 14℃

【解説】

(1) A,B から出る音の波長を λ とする。AP = BP を満たす P から歩いて，次に音が強くなる点 Q では $|\mathrm{AQ}-\mathrm{BQ}|=\lambda$ を満たすはずである。
BQ = 4.0 で，三平方の定理より，

$\mathrm{AQ}=\sqrt{3.0^2+4.0^2}=5.0$

よって，$|\mathrm{AQ}-\mathrm{BQ}|=1.0$ となるので，

$\lambda=1.0\,\mathrm{m}$

(2) 音速を V m/s, 振動数を f Hz とすると，

$V=f\lambda=340\times1.0=340\,\mathrm{m/s}$

$340=331.5+0.6t$ を解くと，

$t\fallingdotseq14.1\fallingdotseq14$℃

226 (1) $\lambda=0.40\,\mathrm{m}$, $f=850\,\mathrm{Hz}$　(2) 0.05 m

【解説】

(1) A 側の管を初めの状態から音波の半波長だけ引き出すと初めて音は強め合うので，初めの状態から 4 分の 1 波長だけ引き出したときに経路差が半波長となり，初めて音は弱め合う。よって，$\dfrac{\lambda}{4}=0.10\,\mathrm{m}$ となり，$\lambda=0.40\,\mathrm{m}$ となる。また，音速を V m/sとすると，$V=f\lambda$ より，

$f=\dfrac{V}{\lambda}=\dfrac{340}{0.40}=850\,\mathrm{Hz}$

(2) 振動数を 2 倍にした音波の波長を λ' とすると，$V=f\lambda=2f\times\lambda'$ より，

$\lambda'=\dfrac{\lambda}{2}=\dfrac{1}{2}\times0.40=0.20\,\mathrm{m}$

4 分の 1 波長だけ引き出したときに初めて音は弱め合うので，求める長さは，

$\dfrac{\lambda'}{4}=\dfrac{0.20}{4}=0.05\,\mathrm{m}$

227 ① $\dfrac{68}{65}f_0$　② $\dfrac{67}{68}f_0$　③ $\dfrac{67}{65}f_0$　④ $\dfrac{67}{71}f$

【解説】

① $f=\dfrac{340-0}{340-15}f_0=\dfrac{340}{325}f_0=\dfrac{68}{65}f_0$

② $f=\dfrac{340-5}{340-0}f_0=\dfrac{335}{340}f_0=\dfrac{67}{68}f_0$

③ $f=\dfrac{340-5}{340-15}f_0=\dfrac{335}{325}f_0=\dfrac{67}{65}f_0$

④ $f=\dfrac{340-5}{340-(-15)}f_0=\dfrac{335}{355}f_0=\dfrac{67}{71}f_0$

228 (1) AB 間の距離:Vt ,

AB 間にある波の個数: f_0t

(2) t 秒後, 波の個数: f_0t

(3) ① $V-v$ ② $V-v$

【解説】

(1) 波の先端は, 音さを鳴らしてから t s 後に観測者に到達する。音速は V m/s であるので, AB＝速さ×時間＝Vt m となる。また, 音さは 1 秒間に f_0 回振動するので, t 秒間では f_0t 回振動する。1 回の振動で波は 1 個発生するので, 波は AB 間に f_0t 個存在することになる。

(2) 音さが静止しながら鳴っていようと, 動きながら鳴っていようと, 音速は Vm/s で変わらない。よって音の到達時間は t 秒後であり, 音さと観測者との間の波の個数は f_0t 個である。

(3) 音速は, 音さの静止, 移動にかかわらず一定であるので, 音波のみかけの速さは①でも②でも変わらない。

相対速度＝相手の速度－基準の速度であるので, みかけの速さ=$V-v$ m/s となる。

229 ① $(V-v_S)t$ ② $\dfrac{V-v_S}{f}$ ③ $\dfrac{V}{V-v_S}f$

④ $V-v_O$ ⑤ $\dfrac{V-v_O}{V-v_S}f$

【解説】

① S′ から t 秒後の音波の先端まで間に音波が存在するので,

$L'=Vt-v_St=(V-v_S)t$

② 距離 L' の中に ft 個の波が存在するので,

$\lambda'=\dfrac{L'}{ft}=\dfrac{(V-v_S)t}{ft}=\dfrac{V-v_S}{f}$

③ 静止している観測者に, 長さ V の音波が単位時間に通過する。この長さに含まれる波の個数は, $\dfrac{V}{\lambda'}=V\cdot\dfrac{f}{V-v_S}=\dfrac{V}{V-v_S}f$ であるので, 観測者は単位時間に

$\dfrac{V}{V-v_S}f$ 個の波を聞くことになる。よって,

$f_S=\dfrac{V}{V-v_S}f$

※公式 $v=f\lambda$ を用いると, 観測者は静止しているので, 観測者から見た音波の見かけの速さは V で, 観測者を通過する音波の波長は λ' , 観測者が聞く音の振動数は f_S であるので, $V=f_S\lambda'$ より,

$f_S=\dfrac{V}{\lambda'}=V\cdot\dfrac{f}{V-v_S}=\dfrac{V}{V-v_S}f$

④ **相対速度＝相手の速度－基準の速度**であるので, 観測者に対する見かけの音速は $V'=V-v_O$ と表される。

⑤ 速さ v_O で音源から遠ざかる観測者に, 長さ V' の音波が単位時間に通過する。この長さに含まれる波の個数は,

$\dfrac{V'}{\lambda'}=\dfrac{V-v_O}{\dfrac{V-v_S}{f}}=\dfrac{V-v_O}{V-v_S}f$ なので, 観測者は単位時間に $\dfrac{V-v_O}{V-v_S}f$ 個の波を聞くことになる。よって, $f_O=\dfrac{V-v_O}{V-v_S}f$

※公式 $v=f\lambda$ を用いると, 観測者に対する見かけの音速は $V-v_O$ で, 観測者を通過する音波の波長は λ' , 観測者が聞く音の振動数は f_O であるので, $V-v_O=f_O\lambda'$ より,

$f_O=\dfrac{V-v_O}{\lambda'}=\dfrac{V-v_O}{\dfrac{V-v_S}{f}}=\dfrac{V-v_O}{V-v_S}f$

230 1.7×10^3 Hz

【解説】

音波の波長を λ m とする。AP = BP であるので, P は強め合う点となる。Q 点では P 点から移動して初めて強め合う点となるので, AQ と BQ の距離の差が 1 波長分になる。よって, $|\mathrm{AQ}-\mathrm{BQ}|=\lambda$ となり,

$\mathrm{AQ}=\sqrt{1.20^2+(0.70+0.20)^2}=1.5$

$\mathrm{BQ}=\sqrt{1.20^2+(0.70-0.20)^2}=1.3$

であるので,

$|1.5-1.3|=\lambda$ より, $\lambda=0.2$

音速を Vとすると, 公式 $V=f\lambda$ より,

$$f=\frac{V}{\lambda}=\frac{340}{0.2}=1.7\times10^3\ \mathrm{Hz}$$

231 λ:0.1 m, f: 3.4×10^3 Hz

【解説】

5 cm引き出すごとに経路差は10 cm増えるので，音波の波長は10 cm = 0.1 m となる。音速をVとすると，$V=f\lambda$より，

$$f=\frac{V}{\lambda}=\frac{340}{0.1}=3.4\times10^3\ \mathrm{Hz}$$

232 （ア）V　（イ）u　（ウ）$V+u$

（エ）$\dfrac{V}{f_0}$　（オ）$\dfrac{V+u}{V}f_0$　（カ）高

（キ）$V-u$　（ク）$\dfrac{V-u}{V}f_0$

【解説】

（ア）音速はVm/sなので，1秒後には音波はVm進む。

（イ）観測者の速さはu m/sなので，1秒後には観測者はu m進む。

（ウ）観測者は音源に近づいているので，1秒で$V+u$ m の音波を受け取ることになる。

（エ）音源は動いていないので波長の伸び縮みはしない。波長をλとすると，公式$V=f_0\lambda$より，$\lambda=\dfrac{V}{f_0}$となる。また，V m の音波の中に波がf_0個入っているので，$\lambda=\dfrac{V}{f_0}$と考えてもよい。

（オ）観測者が1秒に聞く音波の長さは$V+u$ mで，波長は$\lambda=\dfrac{V}{f_0}$であるので，観測者が1秒に聞く波の個数は，

$\dfrac{V+u}{\lambda}=(V+u)\cdot\dfrac{f_0}{V}=\dfrac{V+u}{V}f_0$であり，これが観測者の聞く振動数となる。

（カ）静止しているときよりも聞く振動数が大きくなるので，観測者は高く聞こえる。

（キ）観測者は音源から遠ざかるので，1 秒で$V-u$ m の音波を受け取ることになる。

（ク）観測者が1秒に聞く音波の長さは$V-u$ mで，観測者が1秒に聞く波の個数は，

$\dfrac{V-u}{\lambda}=(V-u)\cdot\dfrac{f_0}{V}=\dfrac{V-u}{V}f_0$であり，これが観測者の聞く振動数となる。

233 (1) $\dfrac{V}{V+v}f_0$　(2) $\dfrac{V}{V-v}f_0$

(3) $\dfrac{2vV}{(V-v)(V+v)}f_0$

【解説】

(1) $f_1=\dfrac{V-0}{V-(-v)}f_0=\dfrac{V}{V+v}f_0$

(2) 観測者が聞く反射音は，反射板が受け取る振動数と同じである。よって観測者が R であると仮定して，その観測者が聞く振動数がf_2であるので，

$$f_2=\frac{V-0}{V-v}f_0=\frac{V}{V-v}f_0$$

(3) 単位時間あたりのうなりの回数は公式より，$|f_2-f_1|$であり，$f_2>f_1$であるので，

$$|f_2-f_1|=f_2-f_1=\frac{V}{V-v}f_0-\frac{V}{V+v}f_0$$
$$=\frac{2vV}{(V-v)(V+v)}f_0$$

234 (1) $f_{\mathrm{R}}=\dfrac{V+v}{V}f$，$f_1=\dfrac{V+v}{V-v}f$

(2) $f_2=\dfrac{(V+w)(V-w+v)}{(V-w)(V+w-v)}f$

【解説】

(1) R が観測者であると仮定すると，R が聞く振動数は $f_{\mathrm{R}}=\dfrac{V-(-v)}{V}f=\dfrac{V+v}{V}f$ となる。

f_{R}の音を出す音源 R が観測者 O に近づいていると仮定すると，観測者 O が聞く反射音の振動数は，

$$f_1=\frac{V}{V-v}f_{\mathrm{R}}=\frac{V}{V-v}\cdot\frac{V+v}{V}f=\frac{V+v}{V-v}f$$

(2) R が観測者であると仮定すると，R が受け取る音速は$V-w$であるので，R が聞く振動数は $f'_{\mathrm{R}}=\dfrac{(V-w)+v}{V-w}f$ となる。f'_{R}の音を出す音源 R が観測者 O に近づいていると仮定すると，観測者 O が受け取る反射音の音速は$V+w$になるので，観測者 O が聞く反射音の振動数は，

$$f_2=\frac{V+w}{(V+w)-v}f'_{\mathrm{R}}$$

$$=\frac{V+w}{V+w-v}\cdot\frac{V-w+v}{V-w}f$$
$$=\frac{(V+w)(V-w+v)}{(V-w)(V+w-v)}f$$

235 $f_A=\frac{V}{V+v}f$,

$f_B=\frac{L\sqrt{L^2+R^2}}{L\sqrt{L^2+R^2}+vL}f$, $f_C=f$,

$f_D=\frac{L\sqrt{L^2+R^2}}{L\sqrt{L^2+R^2}-vL}f$, $f_E=\frac{V}{V-v}f$,

$f_F=f$

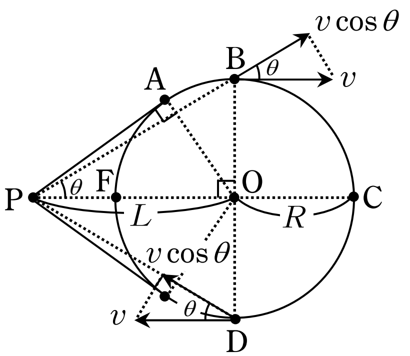
【解説】

音源の速度を, 音源と P を結ぶ軸に分解して考える。ただし, 音源から P の向きを正とする。音源が C,F にあるときは, 音源と P を結ぶ軸の速度成分は 0 であるので, $f_C=f_F=f$ 音源が E にあるときは, 音源と P を結ぶ軸の速度成分は $+v$ であるので, $f_E=\frac{V}{V-v}f$ 音源が A にあるときは, 音源と P を結ぶ軸の速度成分は $-v$ であるので,

$$f_A=\frac{V}{V-(-v)}f=\frac{V}{V+v}f$$

ここで, $\angle BPO=\theta$ とすると,

$\cos\theta=\frac{PO}{PB}=\frac{L}{\sqrt{L^2+R^2}}$ となる。



音源が B,D にあるときは, 図のように音源と P を結ぶ軸の速度成分はそれぞれ $-v\cos\theta$, $+v\cos\theta$ であるので,

$$f_B=\frac{V}{V-(-v\cos\theta)}f=\frac{L}{L+v\frac{L}{\sqrt{L^2+R^2}}}f$$

$$=\frac{L\sqrt{L^2+R^2}}{L\sqrt{L^2+R^2}+vL}f$$

$$f_D=\frac{V}{V-v\cos\theta}f=\frac{L}{L-v\frac{L}{\sqrt{L^2+R^2}}}f$$

$$=\frac{L\sqrt{L^2+R^2}}{L\sqrt{L^2+R^2}-vL}f$$

236 3.13×10^8 m/s

【解説】

1 枚の歯が隣の隙間の部分まで進むとき, 歯車は $1/(720\times2)$ 回転することになる。このときにかかる時間を t とすると,

$1\,\mathrm{s}:12.6$回$=t:\frac{1}{720\times2}$ よって,

$$t=\frac{1}{12.6\times720\times2}\,\mathrm{s}$$

この間に光が歯車と鏡の距離を往復したことになるので, 光の速さは,

$c=$ 往復距離 ÷ 時間

$=2\times8.63\times10^3\,\mathrm{m}\div\frac{1}{12.6\times720\times2}\,\mathrm{s}$

$=3.13\times10^8$ m/s

237 ① 横波 ② 自然 ③ 偏 ④ 90

【解説】

2 枚の偏光板の格子方向が互いに垂直になるとき, 暗くなって物体はほとんど見えない。その後片方を回転させると徐々に明るくなり, 格子方向が互いに平行になったときに最も明るくなって, 物体がはっきり見える。

238 (1) $v=2.25\times10^8$ m/s ,

$\lambda=3.75\times10^{-7}$ m (2) 0.75

(3) 臨界角 $\theta=49°$

(4) $f_0=6.0\times10^{14}$ Hz $f=6.0\times10^{14}$ Hz

【解説】

(1) 空気中から水中に光が進むとき, 屈折の法則より,

$\frac{4}{3}=\frac{c}{v}=\frac{\lambda_0}{\lambda}\cdots$① であるので,

$$v=\frac{3}{4}c=\frac{3}{4}\times3.0\times10^8=2.25\times10^8\,\mathrm{m/s}$$

$$\lambda = \frac{3}{4}\lambda_0 = \frac{3}{4}\times 5.0\times 10^{-7} = 3.75\times 10^{-7}\ \mathrm{m}$$

(2) 空気に対する水の屈折率を $n_{\mathrm{AW}}\left(=\frac{4}{3}\right)$ とすると，水中から空気中に光が進むときの屈折率は，

$n_{\mathrm{WA}} = \frac{v}{c} = \frac{\lambda}{\lambda_0}$ となるので，①式より，

$$n_{\mathrm{AW}} = \frac{3}{4} = 0.75$$

(3) 光が全反射を起こすときの最小の入射角を臨界角という。臨界角は屈折角が 90°のときであるので，

$n_{\mathrm{WA}} = 0.75 = \frac{\sin\theta_0}{\sin 90°}$　　よって，

$\sin\theta_0 = 0.75$ となり，三角関数表より，θ_0 は約 49°となる。

(4) $c = f_0\lambda_0$ より，

$$f_0 = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{3.0\times 10^8}{5.0\times 10^{-7}} = 6.0\times 10^{14}\ \mathrm{Hz}$$

$v = f\lambda$ より，$f = \frac{v}{\lambda}$ …②　ここで①式より，

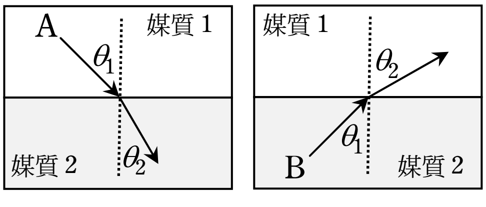
$\frac{c}{\lambda_0} = \frac{v}{\lambda}$ であり，この値は f_0 と等しいので，

$$f = f_0 = 6.0\times 10^{14}\ \mathrm{Hz}$$

つまり，単色光の振動数は，ある媒質から異なる媒質に入射しても変化しないことになる。

239 ①　＞　② 存在しない　③ ＜
④ 存在する　⑤ 大きい　⑥ 小さい
⑦ $\frac{n_2}{n_1}$　⑧ $\frac{n_1}{n_2}$　⑨ $\frac{c}{n_1}$　⑩ $\frac{c}{n_2}$
⑪ $n_2 : n_1$

【解説】



入射角を θ_1，屈折角を θ_2，臨界角を θ_0 とする。

①,② A のように単色光が進む場合，
$n_2 > n_1$ であるので，

$$n_{12} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \sin\theta_0 > 1$$

$\sin\theta_1 > \sin\theta_2$ より，$\theta_1 > \theta_2$
つまり，入射角＞屈折角　また，$\sin\theta_0 > 1$ より，臨界角 θ_0 は存在しない。

③,④ B のように単色光が進む場合，
$n_2 > n_1$ であるので，

$$n_{21} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \sin\theta_0 < 1$$

$\sin\theta_1 < \sin\theta_2$ より，$\theta_1 < \theta_2$
つまり，入射角＜屈折角
また，$\sin\theta_0 < 1$ より，臨界角 θ_0 は存在する。

⑤,⑥ ①～④の結果より，屈折率が大きい媒質から小さい媒質に進むときに臨界角が存在し，光は全反射することができる。

⑦,⑧ 相対屈折率は $n_{12} = \frac{n_2}{n_1}$，$n_{21} = \frac{n_1}{n_2}$ と表される。これは暗記しておくこと。

⑨,⑩ 絶対屈折率は真空に対する屈折率なので，$n_1 = \frac{c}{v_1}$，$n_2 = \frac{c}{v_2}$

よって，$v_1 = \frac{c}{n_1}$，$v_2 = \frac{c}{n_2}$

一般に，(絶対屈折率 n の媒質中の光の速さ)

$= \frac{\text{真空中の光の速さ}}{n}$　となる。

⑪ 屈折の法則により，$n_{12} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$

よって，$\lambda_1 : \lambda_2 = n_2 : n_1$

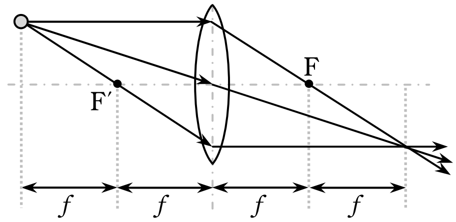
240 (1) ① 白色光　② 連続スペクトル
③ 吸収スペクトル(フラウンホーファー線)
④ 分散　⑤ 短い　⑥ 散乱　⑦ 短い
⑧ 基底　⑨励起

(2) 赤,橙,黄,緑,青,藍,紫

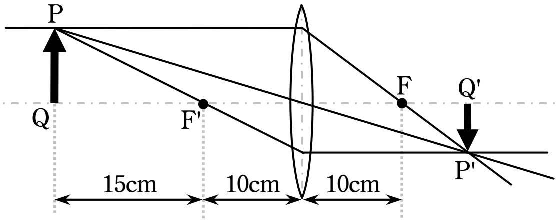
(3) 太陽の周りにある様々な原子や大気中の酸素などが特定の波長の光を吸収するため

(4) 地球は星から遠ざかっている

241



242 $\dfrac{50}{3}$ cm, $\dfrac{2}{3}$ 倍



【解説】

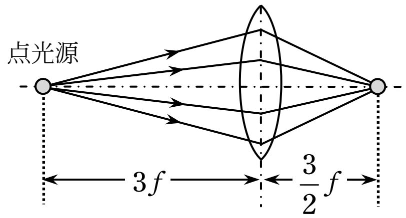
レンズの公式 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{f}$ で，凸レンズで実像ができるので，$a=25$，$f=10$ より，

$\dfrac{1}{25}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{10}$　これを解くと，

$b=\dfrac{50}{3}$　また，倍率は $m=\left|\dfrac{b}{a}\right|=\dfrac{50/3}{25}=\dfrac{2}{3}$

243 $\dfrac{3}{2}f$

【解説】



光が集まる点はレンズの公式によって求められる。求める距離を x とおくと，レンズの公式より，$\dfrac{1}{3f}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{f}$

これを x について解くと，$x=\dfrac{3}{2}f$

244 (1) 20 cm　(2) 解説参照　(3) 4 cm

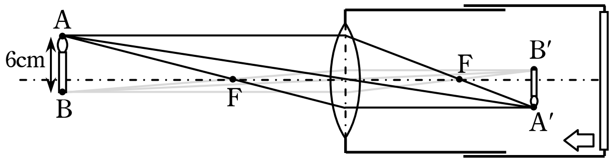
(4) イ

【解説】

(1) レンズの公式より $\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{12}$　よって，

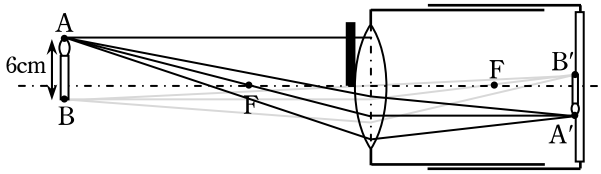
$b=20$ cm

(2) 特徴的な光の経路を描くことで，図のように作図することができる。



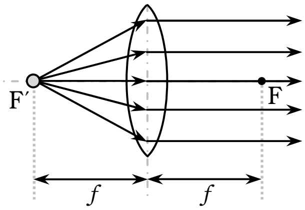
(3) 倍率は $m=\dfrac{b}{a}=\dfrac{20}{30}=\dfrac{2}{3}$ より，$6\times\dfrac{2}{3}=4$ cm

(4) 光は，ろうそくの上端A，下端B，およびそれ以外の点から放射状に出ており，図のようにA，Bから放射状に発する光は，光量が減るものの，同じ位置に像をつくることができる。よって答えはイとなる。

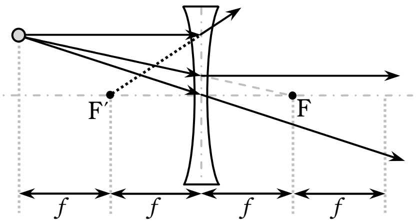


245

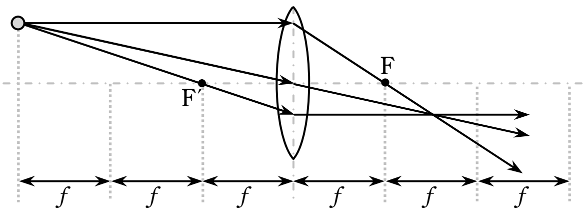
(1)



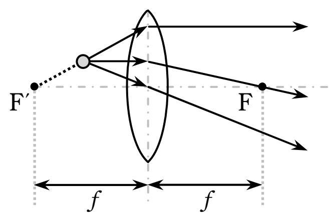
(2)



(3)



(4)



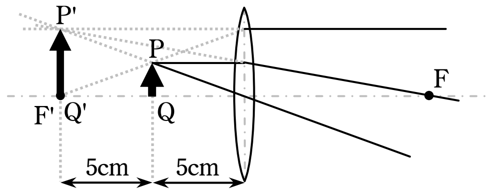
【解説】

(1) 焦点を通る光はレンズを通過後，光軸と平行に進むので，点光源が焦点にあるとき，レンズを通過する光はすべて光軸と平行に進む。

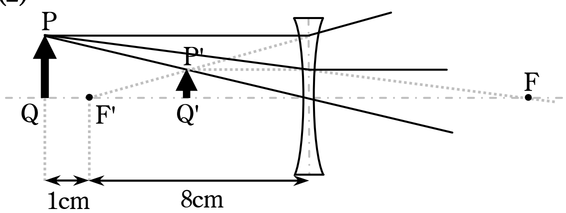
246 (1) 虚像，　10 cm，　2 倍

(2) 虚像，$\dfrac{72}{17}$ cm，$\dfrac{8}{17}$ 倍

(1)



(2)



【解説】

(1) レンズの公式 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{f}$ で，凸レンズで虚像ができるので，$a=5$，$f=10$ より，

$\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{10}$　これを解くと，

$b=-10$　よって，$|b|=10$　また，倍率は

$m=\left|\dfrac{b}{a}\right|=\dfrac{10}{5}=2$

(2) レンズの公式 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{f}$ で，凹レンズで虚像ができるので，$a=9$，$f=-8$ より，

$\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{b}=-\dfrac{1}{8}$　これを解くと，$b=-\dfrac{72}{17}$

よって，$|b|=\dfrac{72}{17}$

また，倍率は，$m=\left|\dfrac{b}{a}\right|=\dfrac{72/17}{9}=\dfrac{8}{17}$

247 36 cm

【解説】

凹レンズを用いているので $f<0$ で，$f=-12$ となる。また，倍率 $m=\left|\dfrac{b}{a}\right|=\dfrac{1}{4}$ より，$|b|=\dfrac{|a|}{4}$

像は虚像であるので，$a>0$，$b<0$ より，$b=-\dfrac{a}{4}$

つまり，$\dfrac{1}{b}=-\dfrac{4}{a}$　よって，公式 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{f}$ より，

$\dfrac{1}{a}-\dfrac{4}{a}=-\dfrac{1}{12}$　これを解くと $a=36$

248 4 cm

【解説】

凸レンズを用いているので $f>0$ で，$f=16$ となる。また，倍率 $m=\left|\dfrac{b}{a}\right|=\dfrac{4}{3}$ より，$|b|=\dfrac{4}{3}|a|$

像は虚像であるので，$a>0$，$b<0$ より，

$b=-\dfrac{4}{3}a$　つまり，$\dfrac{1}{b}=-\dfrac{3}{4a}$　よって，公式

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{f}$ より，$\dfrac{1}{a}-\dfrac{3}{4a}=\dfrac{1}{16}$　これを解くと，

$a=4$

249 速さ:0.63 倍　波長:0.63 倍　振動数:1.0 倍

【解説】

真空中での単色光 D の速さを c，波長を λ_0，振動数を f_0，ガラス中での単色光 D の速さを v，波長を λ，振動数を f とすると，屈折の法則により，$1.6=\dfrac{c}{v}=\dfrac{\lambda_0}{\lambda}$

よって，$v=\dfrac{c}{1.6}=0.625c\fallingdotseq 0.63c$

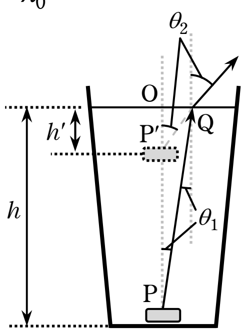
$\lambda=\dfrac{\lambda_0}{1.6}=0.625\lambda_0\fallingdotseq 0.63\lambda_0$

また，$v=f\lambda$ より，$f=\dfrac{v}{\lambda}=\dfrac{c/1.6}{\lambda_0/1.6}=\dfrac{c}{\lambda_0}$

同様に $c=f_0\lambda_0$ より，$f_0=\dfrac{c}{\lambda_0}$　よって，

$f=f_0$

250 $h'=\dfrac{h}{n}$



【解説】

水に対する空気の屈折率を n_{12}，水の屈折率を n_1，空気の屈折率

をn_2とすると，

$n_{12}=\dfrac{n_2}{n_1}=\dfrac{1.0}{n}$であるので，屈折の法則より，

$$\frac{1.0}{n}=\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\fallingdotseq\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}$$

$$=\frac{\mathrm{OQ}/\mathrm{OP}}{\mathrm{OQ}/\mathrm{OP'}}=\frac{\mathrm{OP'}}{\mathrm{OP}}=\frac{h'}{h}$$　よって，$h'=\dfrac{h}{n}$

251 (1) $\dfrac{9}{8}$　(2) $\dfrac{2}{3}$　(3) $0\leqq\sin\theta_1<\dfrac{3}{4}$

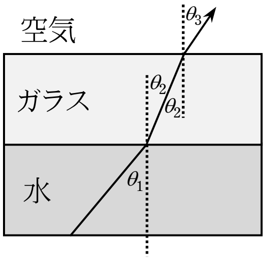
【解説】

(1) $n_{wg}=\dfrac{n_g}{n_w}=\dfrac{3/2}{4/3}=\dfrac{9}{8}$

(2) $n_{ga}=\dfrac{n_a}{n_g}=\dfrac{1}{3/2}=\dfrac{\sin\theta_0}{\sin 90^\circ}$より，

$\sin\theta_0=\dfrac{2}{3}$

(3) 図のように水からガラスに光が入射するときの屈折角をθ_2，ガラスから空気に入射するときの屈折角をθ_3とすると，ガラスから空気に光が透過するためには，$0\leqq\theta_3<90^\circ$，つまり$0\leqq\sin\theta_3<1$ …①が必要な条件である。ここで，屈折の法則より，



$n_{ga}=\dfrac{n_a}{n_g}=\dfrac{1}{3/2}=\dfrac{\sin\theta_2}{\sin\theta_3}$より，

$\dfrac{\sin\theta_2}{\sin\theta_3}=\dfrac{2}{3}$…②　($\theta_3\neq 0$)

$n_{wg}=\dfrac{n_g}{n_w}=\dfrac{3/2}{4/3}=\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$より，

$\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\dfrac{9}{8}$…③

②，③の辺々をかけると，

$\dfrac{\sin\theta_2}{\sin\theta_3}\cdot\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{9}{8}$より，$\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_3}=\dfrac{3}{4}$

よって，$\sin\theta_3=\dfrac{4}{3}\sin\theta_1$ …④

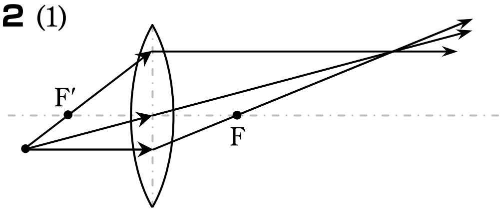
ここで，$\theta_1=0$のとき，光は屈折せず透過し，$\theta_3=0$となるので，$\theta_1=0$ ($\sin\theta_1=0$) のときは条件を満たす。

よって，①，④より，$0\leqq\dfrac{4}{3}\sin\theta_1<1$　となり，

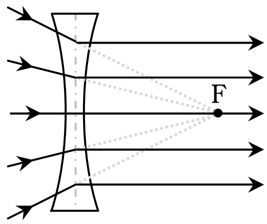
$0\leqq\sin\theta_1<\dfrac{3}{4}$

(注) $n_w<n_g$より，$\theta_2<\theta_1$であるので，水からガラスに入射するときは全反射しない。

252 (1)

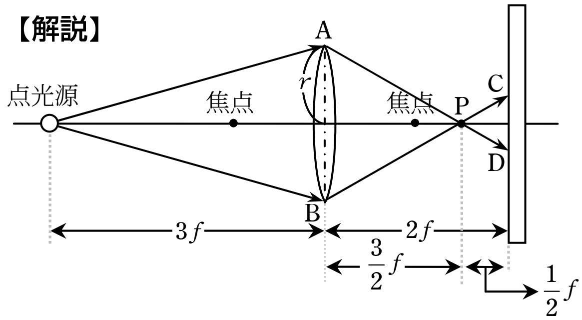


(2)



253 $\dfrac{1}{3}r$

【解説】



光がレンズ後方に集まる点は，レンズの公式によって求めることができる。この点をPとし，レンズからPまでの距離をxとおくと，レンズの公式より，$\dfrac{1}{3f}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{f}$

これをxについて解くと，$x=\dfrac{3}{2}f$

図より，△PAB∽△PCDとなるので，

AB：CD $=2r:\mathrm{CD}=\dfrac{3}{2}f:\dfrac{1}{2}f=3:1$

$\mathrm{CD}=\dfrac{2}{3}r$となるので，スクリーン上の円の半径は，$\dfrac{2}{3}r\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}r$

254 (1) Lからの距離:20cm

像の大きさ:0.5 cm

(2) PとLの距離:20 cm　倍率:4.0

【解説】

(1) レンズの公式より $\dfrac{1}{80}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{16}$

これを解くと, $b=20$ cm

像の倍率は $m=\left|\dfrac{b}{a}\right|=\dfrac{20}{80}=\dfrac{1}{4}$ より,

像の大きさは, $2\times\dfrac{1}{4}=0.5$ cm

(2) 物体Pとレンズは固定されたままなので, 物体 P とスクリーンの距離は $80+20=100$cm で変わらない。よって, スクリーンに明瞭な像ができるときの物体 P とレンズ L の距離が x cm であるとすると, レンズ L とスクリーン S の距離は $100-x$ cm

レンズの公式より, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{100-x}=\dfrac{1}{16}$

式を整理すると,

$x^2-100x+1600=0$　因数分解すると,

$(x-80)(x-20)=0$　となり, $x=80$ のときは(1) と同じ位置なので, 求める解は $x=20$

像の倍率は $m=\left|\dfrac{100-x}{x}\right|=\dfrac{80}{20}=4.0$

255 ① 前方　②7.5 cm　③ 正立　④ 虚像　⑤ 0.25

【解説】

凹レンズの場合はレンズ前方に正立の虚像ができる。

② レンズの公式より, $\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{b}=-\dfrac{1}{10}$

これを解くと,

$b=-\dfrac{30}{4}=-7.5$　よって, $|b|=7.5$ cm

⑤ 倍率は $m=\left|\dfrac{b}{a}\right|=\left|\dfrac{-7.5}{30}\right|=0.25$

256 ① $\sin\theta_2$　② $\sin\theta_1$　③ ＜　④ ＞　⑤ $\dfrac{\sin\theta_r}{\sin\theta_1}c$　⑥ $\dfrac{\sin\theta_b}{\sin\theta_1}c$　⑦ ＞　⑧ ＞　⑨ ＞　⑩ 長い　⑪ $\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_r}$　⑫ $\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_b}$　⑬ ＜　⑭ 短い　⑮ 赤い

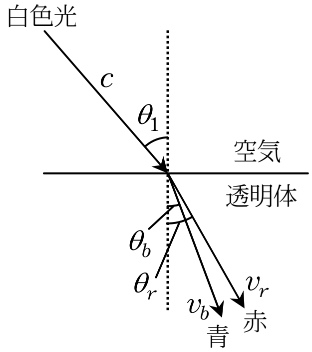
【解説】

①,② ある波長の光が空気から透明体に進むときの相対屈折率を n_{AT} とすると,

屈折の法則により, $n_{AT}=\dfrac{n_T}{n_A}=\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$

よって, $n_A : n_T=\sin\theta_2 : \sin\theta_1 \cdots$(A)

③,④ どのような波長の光でも, $\theta_2<\theta_1<90°$ となっているので, $\sin\theta_2<\sin\theta_1$ となり, (A)より $n_A<n_T$ となる。



⑤,⑥ 赤い光についての屈折の法則より,

$\dfrac{c}{v_r}=\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_r}$　よって, $v_r=\dfrac{\sin\theta_r}{\sin\theta_1}c$

青い光についての屈折の法則より,

$\dfrac{c}{v_b}=\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_b}$　よって, $v_b=\dfrac{\sin\theta_b}{\sin\theta_1}c$

⑦,⑧ 図より $\theta_r>\theta_b$ であり, どちらも90°より小さいので, $\sin\theta_r>\sin\theta_b$

⑨,⑩　⑤～⑧の結果より, $v_r>v_b$ となり, 波長が長い光ほど速く進む。

⑪～⑭ 屈折の法則により,

$n_r=\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_r}$, $n_b=\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_b}$

となり, $\theta_r>\theta_b$ であるので, $n_r<n_b$ となるので, 屈折率は青い光の方が大きい。よって波長が短い光ほど屈折率が大きい。

⑮ 波の性質として, 波長の長い波ほど回折しやすい。よって, 赤い光のほうが, 回折が著しい。p170「9 章 波の伝わり方」の「波の回折」を参照

257 (1) 1.24×10^8 m/s　(2) ア. $\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta_1}$　イ. ＞　ウ. $\dfrac{n_2}{n_1}$　エ. $\sqrt{n_1^2-n_2^2}$

(1) 単に屈折率という場合は, 絶対屈折率を表すことに注意する。物質の屈折率を n, 光の

速さを c とすると，物質中での光の速さは，

$v=\dfrac{c}{n}$ となる。よって，光の速さが最も遅いのは，屈折率が最も大きいダイヤモンドとなる。

ダイヤモンド中の光の速さは，

$$v=\frac{3.00\times10^8}{2.42}=1.239\cdots\times10^8$$

$\fallingdotseq 1.24\times10^8$ m/s

(2) 空気の屈折率は 1 と見なせるので，屈折の法則より，$\dfrac{n_1}{1}=\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta_1}$

よって，$n_1=\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta_1}\cdots$①

A→B と光が進むときの臨界角を ϕ_0 とすると，屈折の法則より，

$$\frac{n_2}{n_1}=\frac{\sin\phi_0}{\sin 90^\circ}=\sin\phi_0\cdots②$$

全反射を起こす場合，臨界角が必ず存在しなければいけない。臨界角が存在するためには，$\dfrac{n_2}{n_1}=\sin\phi_0<1$，よって，$n_1>n_2$

さらに，入射角が臨界角より大きければ常に全反射を起こすので，

$\phi_1>\phi_0$ が必要である。よって，

$\sin\phi_1>\sin\phi_0$

②より，$\sin\phi_0=\dfrac{n_2}{n_1}$ であるので，

$$\sin\phi_1>\sin\phi_0=\frac{n_2}{n_1}$$

よって，$\sin\phi_1>\dfrac{n_2}{n_1}\cdots$③

$\theta_1+\phi_1=90^\circ$ であるので，$\phi_1=90^\circ-\theta_1$

これを③に代入すると，

$$\sin(90^\circ-\theta_1)>\frac{n_2}{n_1}$$

よって，$\cos\theta_1>\dfrac{n_2}{n_1}\cdots$④

①より，$\sin\theta_1=\dfrac{\sin\theta}{n_1}$ であるので，

三角比の定義により，$\cos^2\theta_1+\sin^2\theta_1=1$ で，$0<\theta_1<90^\circ$ より，$\cos\theta_1>0$ であることに注意すると，

$$\cos\theta_1=\sqrt{1-\sin^2\theta_1}=\sqrt{1-\left(\frac{\sin\theta}{n_1}\right)^2}$$

これを④に代入すると，

$\sqrt{1-\left(\dfrac{\sin\theta}{n_1}\right)^2}>\dfrac{n_2}{n_1}$ 両辺は正であるので，

$1-\left(\dfrac{\sin\theta}{n_1}\right)^2>\left(\dfrac{n_2}{n_1}\right)^2$ 両辺に n_1^2 をかけると，

$n_1^2-\sin^2\theta>n_2^2$ よって，

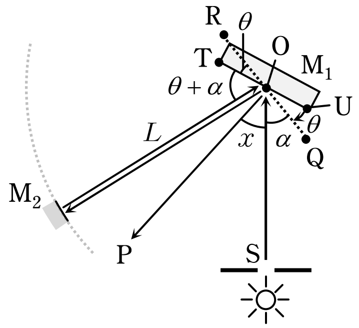
$\sin^2\theta<n_1^2-n_2^2$ $\sin\theta>0$ であるので，

$\sin\theta<\sqrt{n_1^2-n_2^2}$

258 ① 2θ ② $\dfrac{1}{360n}$ ③ $\dfrac{\theta}{360n}$

④ $\dfrac{2L}{c}$ ⑤ $\dfrac{720nL}{\theta}$ ⑥ 2.98×10^8

【解説】



① $\angle POQ=2\theta+\alpha=x+\alpha$ であるので，これを x について解くと，$x=2\theta$ となる。

② 1 s で $360n$°回転し，t s で 1°回転すると仮定すると，$1:360n=t:1$ よって，$t=\dfrac{1}{360n}$

③ 1°回転するのに $\dfrac{1}{360n}$ s かかるので，θ°回転するのに $\dfrac{\theta}{360n}$ s かかる。

④（光が OM_2 を往復するのにかかる時間）

=(往復の距離) ÷(光の速さ) $=\dfrac{2L}{c}$

⑤（光が OM_2 を往復するのにかかる時間）

=(M_1 が θ°回転するのにかかる時間)

であるので，$\dfrac{2L}{c}=\dfrac{\theta}{360n}$

これを c について解くと，$c=\dfrac{720nL}{\theta}$

⑥ $x=2\theta=0.0772$ であるので，$\theta=0.0386$ となる。

$$c=\frac{720nL}{\theta}=\frac{720\times800\times20.0}{0.0386}$$

$\fallingdotseq 2.98\times10^8$

259 凹面鏡の前方 12.5 cm に実像ができる

倍率:0.25

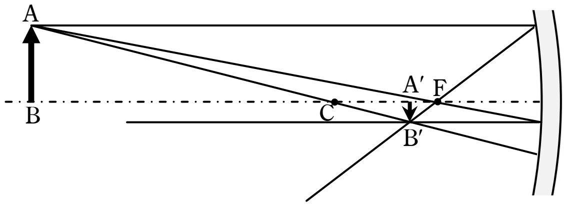
【解説】

公式 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{f}$ で，$a=50$，$f=10$ より，

$\dfrac{1}{50}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{10}$　b について解くと，

$b=\dfrac{50}{4}=12.5\text{ cm}$

また，像は実際に光が集まってできるので，像は実像である。



倍率は $m=\dfrac{b}{a}=\dfrac{12.5}{50}=\dfrac{1}{4}=0.25$

260 ① 正立　② 虚像　③ 後方　④ 20 cm　⑤ 2.0　⑥ 正立　⑦ 虚像　⑧ 後方　⑨ 20 cm　⑩ 0.33

【解説】

④⑤ 公式 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{f}$ で，$a=10$，$f=20$ より，

$\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{20}$　b について解くと，$b=-20$

よって，$|b|=20$　倍率は，

$$m=\left|\frac{b}{a}\right|=\left|\frac{-20}{10}\right|=2.0$$

⑨⑩ 公式 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{f}$ で，$a=60$，$f=-30$

より，$\dfrac{1}{60}+\dfrac{1}{b}=-\dfrac{1}{30}$　b について解くと，

$b=-20$　よって，$|b|=20$　倍率は，

$$m=\left|\frac{b}{a}\right|=\left|\frac{-20}{60}\right|=\frac{1}{3}=0.333\cdots\fallingdotseq 0.33$$

261 (1) 1.045　(2) 0.997　(3) 2.00375　(4) 0.015

【解説】

(1) $(1+x)^3\fallingdotseq 1+3x=1+3\times1.5\times10^{-2}$
$=1.045$　※電卓で計算すると 1.045678…

(2) $\sqrt{1-0.4x}=(1-0.4x)^{\frac{1}{2}}\fallingdotseq 1-\dfrac{1}{2}\times0.4x$
$=1-0.2x=1-0.2\times1.5\times10^{-2}=0.997$
※電卓で計算すると 0.9969954…

(3) $\sqrt{4+x}=\sqrt{4\left(1+\dfrac{1}{4}x\right)}=2\left(1+\dfrac{1}{4}x\right)^{\frac{1}{2}}x$

$\fallingdotseq 2\left(1+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}x\right)=2\left(1+\dfrac{1}{8}x\right)=2+\dfrac{1}{4}x$

$=2+\dfrac{1}{4}\times1.5\times10^{-2}=2.00375$

※電卓で計算すると 2.0037469…

(4) $\sin x\fallingdotseq x=0.015$
※電卓で計算すると 0.0149998…

262 ① nd　② $\dfrac{\lambda}{n}$　③ $2d$　④ $2nd$

⑤ 固定端　⑥ 固定端　⑦ $\left(m+\dfrac{1}{2}\right)\lambda$

【解説】

① 光学的距離＝屈折率×実際の距離 で求められるので，nd となる。

② 屈折の法則により，波長は真空中の n 分の 1 倍になるので，$\dfrac{\lambda}{n}$ となる。

③④ 経路差は光が薄膜を往復する距離 $2d$ であるので，光路差は $2nd$ となる。

⑤⑥⑦ B, C での反射は，屈折率の小さい物質から大きな物質へ向かう境界面での反射であるので，どちらも固定端反射となり，ともに位相は反転して反射する。よって，反射後空気中で弱めあうための条件は，

光路差＝$m\lambda+\dfrac{1}{2}\lambda$　$(m=0,1,2,3\cdots)$

263 (1) $r=\dfrac{dx_m}{L}$

(2) S_1，S_2 では同位相で光が到達し，

$OS_1 = OS_2$ であるので, O ではそれぞれから出た光が同位相で到達し, 光が強め合うから。

(3) $r = m\lambda$

(4) $x_m = \dfrac{m\lambda L}{d}$, $x_{m+1} = \dfrac{(m+1)\lambda L}{d}$

(5) $\dfrac{\lambda L}{d}$

【解説】

(1) ヤングの実験の経路差は $\dfrac{dx}{L}$ であるので,

$r = \dfrac{dx_m}{L}$

(2) 1 つの光源から S_1, S_2 までの距離は等しいので, S_1, S_2 からは同位相の光がスクリーンに向かって広がっていくことに注意する。

(3) 強め合う条件は(経路差) $= m\lambda$ であるので, $r = m\lambda$ となる。

(4) (1),(3) より, r を消去すると, $\dfrac{dx_m}{L} = m\lambda$

x_m について解くと, $x_m = \dfrac{m\lambda L}{d}$ となる。

よって, $x_{m+1} = \dfrac{(m+1)\lambda L}{d}$

(5) $\Delta x = x_{m+1} - x_m$

$= \dfrac{(m+1)\lambda L}{d} - \dfrac{m\lambda L}{d} = \dfrac{\lambda L}{d}$

264 (1) $d\sin\theta$ (2) $\dfrac{dx}{L}$ (3) $\dfrac{dx}{L} = m\lambda$

(4) $\dfrac{\lambda L}{d}$ (5) b,各スリットから点 O までの経路はすべて等しいと見なすことができるので, どのような波長の光でも点 O で強め合うから。

【解説】

(1) 回折格子の隣り合う 2 つのスリットからスクリーン上の同じ点に達する光の経路差は $d\sin\theta$ である。

(2) $\tan\theta = \dfrac{x}{L} \fallingdotseq \sin\theta$ であるので,

$d\sin\theta = \dfrac{dx}{L}$

(3) 強め合う条件は光の経路差が波長の整数倍であるときなので, $\dfrac{dx}{L} = m\lambda$

(4) (3)の式を x について解くと $x = \dfrac{\lambda L m}{d}$ ($m =$ 0,1,2,3…) で, 明線の間隔は O から m 番目の明線までの距離と O から $m+1$ 番目の明線までの距離の差で求められるので,

$\dfrac{\lambda L(m+1)}{d} - \dfrac{\lambda L m}{d} = \dfrac{\lambda L}{d}$

(5) 1 次の明線ができる条件は $d\sin\theta = \lambda$ となり, λが小さいほど θ が小さくなる。よって, 可視光の中で比較的波長が短い青い光は b 側に現れる。また, 明線ができる条件は $d\sin\theta = m\lambda$ で, $m = 0$ のときはλの値にかかわらず経路差 $d\sin\theta = 0$ である。つまりどのような色の光でも $m = 0$ では強め合うことになる。

265 (1) $2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i}$

(2) $d = \dfrac{m\lambda}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}$ (3) $\dfrac{\lambda}{2n}$

【解説】

(1) 屈折角を θ とすると, 屈折の法則より,

$n = \dfrac{\sin i}{\sin\theta}$ よって, $\sin\theta = \dfrac{\sin i}{n}$ …(※)

また, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ $(0° < \theta < 90°)$ であるので, $\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta}$ よって, 光路差は,

$2nd\cos\theta = 2nd\sqrt{1 - \sin^2\theta}$

$= 2nd\sqrt{1 - \left(\dfrac{\sin i}{n}\right)^2} = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i}$

(2) D では自由端反射, E では固定端反射をするので, 弱め合う条件は,

$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} = m\lambda$ となるので,

$d = \dfrac{m\lambda}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}$ …①

(※) より, $\sin\theta = \dfrac{\sin i}{n} < 1$ で, $\sin i < n$

つまり $n^2 - \sin^2 i > 0$ となり, ①は矛盾しない。

(3) 薄膜に垂直に入射するとき $i = 0$ で, ①式より, d が最も小さくなる m の値は 1 である。よって求める薄膜の厚さは,

$$d=\frac{1\times\lambda}{2\sqrt{n^2-\sin^2 0°}}=\frac{\lambda}{2n}$$

266 (1) イ　(2) $d=\frac{\lambda}{2}\left(m+\frac{1}{2}\right)$

(3) $x_m=\frac{\lambda L}{2D}\left(m+\frac{1}{2}\right)$　(4) $\Delta x=\frac{\lambda L}{2D}$

【解説】

(1) 点 O では上側のガラス板で自由端反射し, 下側のガラス板で固定端反射するので, 光は打ち消し合って暗くなる。よってイのような干渉縞が現われる。

(2) 上のガラス板下面で反射する光と下のガラス板上面で反射する光の経路差は $2d$ であるので, 位置 P で光が強め合う条件は,

$2d=m\lambda+\frac{1}{2}\lambda$ より, $d=\frac{\lambda}{2}\left(m+\frac{1}{2}\right)$ …①

(3) 図形的に $x_m : L=d : D$ であるので,

$x_m=\frac{Ld}{D}$　これに①を代入すると,

$$x_m=\frac{L}{D}\times\frac{\lambda}{2}\left(m+\frac{1}{2}\right)=\frac{\lambda L}{2D}\left(m+\frac{1}{2}\right)$$

(4) m 番目と m+1 番目の明線の間隔を求めればいいので, $\Delta x=x_{m+1}-x_m$

$$=\frac{\lambda L}{2D}\left(m+1+\frac{1}{2}\right)-\frac{\lambda L}{2D}\left(m+\frac{1}{2}\right)=\frac{\lambda L}{2D}$$

267 (1)① $\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda$　② $m\lambda$　(2) 弱め合う

(3) $\frac{r^2}{R}$　(4) $r_m=\sqrt{mR\lambda}$

【解説】

(1) 反射光 I は自由端反射し, 反射光 II は固定端反射したので, それぞれの反射光が強め合う時は,

(経路差) $=m\lambda+\frac{1}{2}\lambda$, 弱め合う時は,

(経路差) $=m\lambda$ となる。

(2) 位置 P でも, I は自由端反射, II は固定端反射するので, 反射波は互いに逆位相となる。よって P では暗くなる。また, 暗くなる条件は $2d=m\lambda$ であり, $d=0$ のとき $m=0$ で整数 m が存在するので, この条件にも合っている。

(3) 3 平方の定理によって $(R-d)^2+r^2=R^2$ が成り立つので, これを d について解くと,

$$d=R-\sqrt{R^2-r^2}=R-R\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}$$

$$=R-R\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}}\fallingdotseq R-R\left(1-\frac{r^2}{2R^2}\right)$$

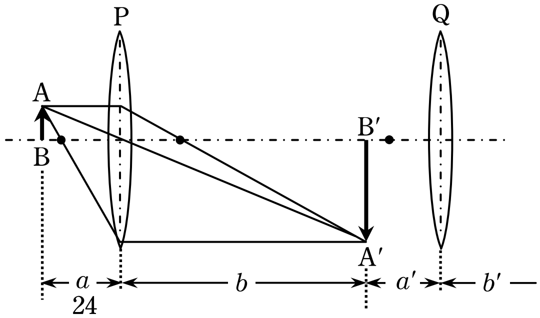
$$=\frac{r^2}{2R}$$ よって, $2d=\frac{r^2}{R}$

(4) 位置 Q で暗くなる条件は, $\frac{r^2}{R}=m\lambda$ であり, これを r について解くと, $r=\sqrt{mR\lambda}$　これは P から m 番目の暗環までの距離を表しているので, r を r_m に置き換えて,

$r_m=\sqrt{mR\lambda}$ となる。

268 (1) P の後方 72 cm　(2) 92 cm

【解説】



(1) 公式 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$ より, $\frac{1}{24}+\frac{1}{b}=\frac{1}{18}$

b について解くと, $b=72$

よって, AB の像 A′B′ は P の後方 72 cm の位置になる。

(2) 像 A′B′ は Q の前方にあるので A′B′ は実光源となる。像 A′B′ と Q までの距離を a', Q から実像までの距離を b' とすると, この実像は AB の 9.0 倍なので,

$\left|\frac{b}{a}\right|\cdot\left|\frac{b'}{a'}\right|=\left|\frac{72}{24}\right|\cdot\left|\frac{b'}{a'}\right|=9.0$ より,

$|b'|=3|a'|$ …①

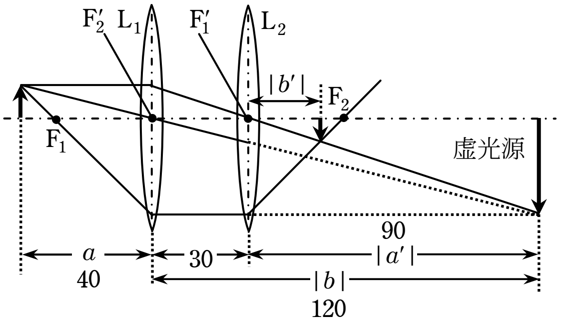
A′B′ は実光源で, Q による像が Q の後方にできるためには, $a'>0$, $b'>0$ でなければいけないので, ①式は $b'=3a'$ …②

また公式 $\frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}=\frac{1}{f'}$ より,

$\dfrac{1}{a'}+\dfrac{1}{b'}=\dfrac{1}{15}\cdots$③　②,③を解くと, $a'=20$,
$b'=60$　よって,
$PQ=b+a'=72+20=92\text{ cm}$

269 L_2の後方 22.5cm の位置に高さ 3.0cm の実像ができる

【解説】

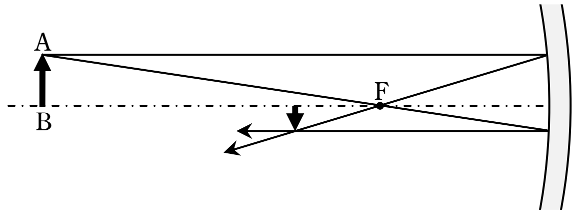


図のようにL_1によってできる像の位置を b とすると, $\dfrac{1}{40}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{30}$ より, $b=120$
$b>30$ なので, L_2の後方 $120-30=90\text{ cm}$ の位置に虚光源ができると考えられる。よって図の a' は $a'<0$ で $a'=-90$ となる。この虚光源のL_2による像の位置を b' とすると,
$\dfrac{1}{-90}+\dfrac{1}{b'}=\dfrac{1}{30}$ より, $b'=\dfrac{45}{2}$　$b'>0$ であるので, L_2の後方 $\dfrac{45}{2}$ cm の位置に実像ができる。
倍率は $\left|\dfrac{b}{a}\right|\cdot\left|\dfrac{b'}{a'}\right|=\left|\dfrac{120}{40}\right|\cdot\left|\dfrac{45/2}{-90}\right|=\dfrac{3}{4}$ より, 像の高さは, $4.0\times\dfrac{3}{4}=3.0\text{ cm}$　また, 図のように作図によって実像は倒立となる。よって, L_2の後方 $\dfrac{45}{2}$ (22.5) cm の位置に高さ 3.0cm の倒立の実像ができる。

270 鏡の前方 15cm に実像ができる
倍率:0.5

【解説】

凹面鏡による像の位置を b とすると,
公式$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{f}$ で, $a=30$, $f=10$ より,
$\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{10}$　b について解くと, $b=15$
倍率は $m=\dfrac{b}{a}=\dfrac{15}{30}=\dfrac{1}{2}=0.5$
この位置に物体の光が実際に集まるので, 像は実像である。



271 ① 正立　② 虚像　③ 後方　④ 15 cm
⑤ 1.5　⑥ 正立　⑦ 虚像　⑧ 後方
⑨ 7.5 cm　⑩ 0.25

【解説】

④⑤ 凹面鏡による像の位置を b とすると,
公式$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{f}$ で, $a=10$, $f=30$ より,
$\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{30}$　b について解くと, $b=-15$
よって, $|b|=15$　倍率は,
$m=\left|\dfrac{b}{a}\right|=\left|\dfrac{-15}{10}\right|=1.5$
⑨⑩ 凸面鏡による像の位置を b とすると,
公式$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{f}$ で, $a=30$, $f=-10$ より,
$\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{b}=-\dfrac{1}{10}$　b について解くと,
$b=-7.5$　よって, $|b|=7.5$
倍率は $m=\left|\dfrac{b}{a}\right|=\left|\dfrac{-7.5}{30}\right|=0.25$

272 格子定数: 5.0×10^{-6} m　本数: 2.0×10^{3} 本

【解説】

格子定数 d の回折格子を用いたとき, 光が強め合う条件は $d\sin\theta=m\lambda$ である。入射方向と30°の角を成す方向に 5 次の明線が得られたことから $m=5$, $\theta=30°$ となるので,
$d=\dfrac{m\lambda}{\sin\theta}=\dfrac{5\times5.0\times10^{-7}}{\sin30°}$
$=5.0\times10^{-6}\text{ m}=5.0\times10^{-4}\text{ cm}$
よって, 1 cm あたりのすじの本数は,
$1\div(5.0\times10^{-4})=2.0\times10^{3}$ 本

273 (1) $S_1P = L\left\{1+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-0.5d}{L}\right)^2\right\}$,

$S_2P = L\left\{1+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x+0.5d}{L}\right)^2\right\}$, $\phi = \dfrac{dx}{L}$

(2) 距離:ns 波長:$\dfrac{1}{n}\lambda$

(3) S_1P と S_2P の光路差: $\dfrac{dx'}{L}$

SS_1 と SS_2 の光路差: $s(n-1)$

(4) $\phi' = s(n-1)+\dfrac{dx'}{L}$

(5) 下側に $\dfrac{(n-1)sL}{d}$ だけ移動

【解説】

(1) $(1\pm x)^n \fallingdotseq 1\pm nx$ を用いると,

$$S_1P = L\sqrt{1+\left(\frac{x-0.5d}{L}\right)^2}$$

$$= L\left\{1+\left(\frac{x-0.5d}{L}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\fallingdotseq L\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{x-0.5d}{L}\right)^2\right\} = L+\frac{(x-0.5d)^2}{2L}$$

$$S_2P = L\sqrt{1+\left(\frac{x+0.5d}{L}\right)^2}$$

$$= L\left\{1+\left(\frac{x+0.5d}{L}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\fallingdotseq L\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{x+0.5d}{L}\right)^2\right\} = L+\frac{(x+0.5d)^2}{2L}$$

よって,

$$\phi = S_2P - S_1P$$

$$= L+\frac{(x+0.5d)^2}{2L} - \left\{L+\frac{(x-0.5d)^2}{2L}\right\}$$

$$= \frac{dx}{L}$$

(2) 屈折率 n の透明板中を距離 s だけ進むときの光学距離は ns である。光学的距離は光が同じ時間に真空中を進む距離であるが,空気の絶対屈折率は1.0で真空とほぼ同じなので,空気中でも同じ時間に ns だけ進む。また,透明板中を進む光の波長と速さは,ともに空気中(真空中)の $\dfrac{1}{n}$ 倍になる。よって,透明板中での光の波長は $\dfrac{\lambda}{n}$ となる。

(3) (1) より, S_1P と S_2P の光路差は $\dfrac{dx'}{L}$ と表すことができる。また, $SS_1 = SS_2 = \ell$ とすると, SS_1 の光学的距離は ℓ, SS_2 の光学的距離は $\ell - s + ns$ であるので, 求める光路差は, $(\ell - s + ns) - \ell = s(n-1)$

(4) [光路長 SS_2]－[光路長 SS_1]

$$= s(n-1) \cdots ①$$

[光路長 S_2P]－[光路長 S_1P] $= \dfrac{dx'}{L} \cdots ②$

①＋②より,

[光路長 SS_2P]－[光路長 SS_1P]

$$= s(n-1)+\frac{dx'}{L}$$

(5) 透明板を置く前のPが強め合うための条件は, $\dfrac{dx}{L} = m\lambda \cdots ③$ ($m = 0,1,2,3\cdots$)

透明板を置いた後の P が強め合うための条件は, $s(n-1)+\dfrac{dx'}{L} = m\lambda \cdots ④$

($m = 0,1,2,3\cdots$)

③,④をそれぞれ x, x' について解くと,

$$x = \frac{mL\lambda}{d}, \quad x' = \frac{mL\lambda + Ls(1-n)}{d}$$

$n > 1$ より $x > x'$ であるので,

$x - x' = \dfrac{(n-1)sL}{d}$ となり, 透明板を入れた後のスクリーン上の明線は, 入れる前に比べて $\dfrac{(n-1)sL}{d}$ だけ下側に移動したことになる。

274 (1) $\lambda = \dfrac{d\sin\theta}{m}$ (2) 可視光で一番(短い)波長は約(3.8×10^{-7}) m

【解説】

(1) となり合う凸部で反射する光の経路差は図より $d\sin\theta$ であるので,これが波長の整数倍になったとき,反射光は互いに強め合う。よっ

て $d\sin\theta = m\lambda$ より, $\lambda = \dfrac{d\sin\theta}{m}$

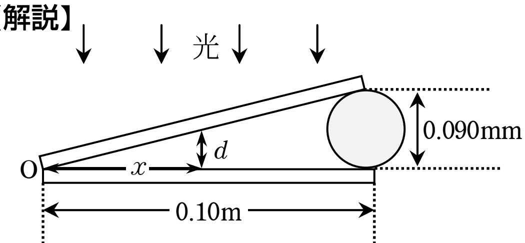
(2) 角度 θ を 0°から徐々に大きくしていくと, 経路差 $d\sin\theta$ も 0 から徐々に大きくなる。この経路差が, 可視光で一番短い波長の 1 波長分に達したとき, 初めて強め合う可視光が観察できたと考えられる。

$d\sin\theta_1 = 1.6\times10^{-6}\times2.4\times10^{-1}$

$= 3.84\times10^{-7}$ より, 可視光で一番短い波長は約 3.8×10^{-7} m となる。

275 2.6×10^{-4} m

【解説】



上のガラスの下面:自由端
下のガラスの上面:固定端

干渉縞の間隔は暗線の間隔, 明線の間隔で求められる。図のように O から x だけ離れた空気層の厚さを d とすると, 三角形の相似比から,

$x : d = 0.10 : 0.090\times10^{-3}$

よって, $x = \dfrac{0.10d}{0.090\times10^{-3}} = \dfrac{d}{9}\times10^4$ …①

光の波長を λ とすると, 位置 x で暗線となる条件は, 経路差 $2d = m\lambda$ (m =0,1,2,3…) であるので, $d = \dfrac{1}{2}m\lambda$ 　これを①に代入すると,

$x = \dfrac{d}{9}\times10^4 = \dfrac{1}{9}\times\dfrac{1}{2}m\lambda\times10^4 = \dfrac{1}{18}m\lambda\times10^4$

これは O から m 番目の暗線の位置を表しているので, この式を x_m とおくと, 暗線の幅は次のように計算できる。

$x_{m+1} - x_m = \dfrac{1}{18}(m+1)\lambda\times10^4 - \dfrac{1}{18}m\lambda\times10^4$

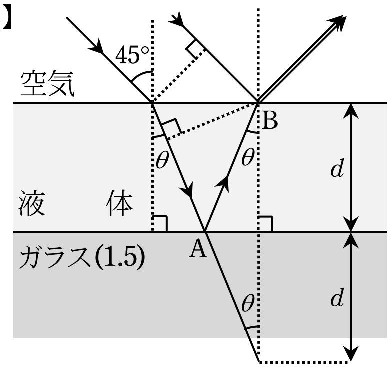
$= \dfrac{1}{18}\lambda\times10^4 = \dfrac{1}{18}\times4.7\times10^{-7}\times10^4$

$\fallingdotseq 2.61\times10^{-4}$

よって, 干渉縞の間隔は 2.6×10^{-4} m となる。

276 (1) 30° (2) $d = 2.45\times10^{-7}$ m

【解説】



(1) 屈折の法則より $\sqrt{2} = \dfrac{\sin 45^\circ}{\sin\theta}$ 　よって,

$\sin\theta = \dfrac{\sin 45^\circ}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$ となり,

$\theta = 30^\circ$ となる。

(2) 液体の膜の厚さを d, 液体の屈折率を n とすると, 図のように経路差は $2d\cos30^\circ$ であるので, 光路差は $2nd\cos30^\circ$ となる。$\sqrt{2} < 1.5$ であるので, 図の A と B での反射はどちらも固定端反射となる。よって, それぞれで反射した光が空気中で強め合うための条件は,

$2nd\cos30^\circ = m\lambda$ (m =1,2,3 …)

となるので,

$d = \dfrac{m\lambda}{2n\cos30^\circ} \geqq \dfrac{1\cdot\lambda}{2n\cos30^\circ}$

$= \dfrac{6.0\times10^{-7}}{2\cdot\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}/2)}$

$= \sqrt{6}\times10^{-7} = 2.45\times10^{-7}$

277 (1) 暗くなっている　(2) $d = \dfrac{r^2}{2R}$

(3) 9.0×10^{-3} m

【解説】

(1)平凸レンズの中心では, 平凸レンズの下側で自由端反射した光と平面ガラスの上側で固定端反射した光が経路差 0 で干渉するため, 光は弱め合って暗くなる。

(2) 3 平方の定理によって $(R-d)^2 + r^2 = R^2$ が成り立つので, これを d について解くと,

$d = R - \sqrt{R^2 - r^2} = R - R\sqrt{1 - \dfrac{r^2}{R^2}}$

$$\fallingdotseq R - R\left(1 - \frac{r^2}{2R^2}\right) = \frac{r^2}{2R}$$

よって, $d = \dfrac{r^2}{2R} \cdots$①

(3) 平凸レンズ曲面では自由端反射, 平面ガラス上面では固定端反射するので, 暗環ができる条件は,

経路差 $2d = m\lambda$ (m =0,1,2,3 …)　…②

①,②より d を消去すると, $2 \times \dfrac{r^2}{2R} = m\lambda$ となり,

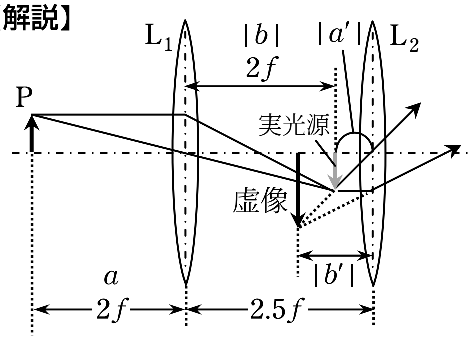
r について解くと, $r = \sqrt{mR\lambda}$　これは m 番目の暗環の半径を表しているので, $m = 5$ のとき,

$r = \sqrt{5 \times 27 \times 6.0 \times 10^{-7}} = \sqrt{81 \times 10^{-6}}$

$= 9.0 \times 10^{-3}$ m

278 $\mathrm{L_2}$ の 前方 f mの位置に高さ $2x$ mの虚像ができる

【解説】



$\mathrm{L_1}$ による像の位置 b を求めると,

公式 $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{f}$ で, $a = 2f$ であるので,

$$\frac{1}{2f} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

これを b について解くと, $b = 2f$ となる。

よって, $\mathrm{L_1}$ の後方 $2f$ の位置に像ができ, これは $\mathrm{L_2}$ の前方にあるので実光源となる。この実光源の $\mathrm{L_2}$ による像の位置 b' を求めると, 公式 $\dfrac{1}{a'} + \dfrac{1}{b'} = \dfrac{1}{f}$ で, 図より $a' = 0.5f$ であるので,

$\dfrac{1}{0.5f} + \dfrac{1}{b'} = \dfrac{1}{f}$　これを b' について解くと,

$b' = -f$ となり, $b' < 0$ であるので像は虚像となり, その位置は $\mathrm{L_2}$ の前方 f m である。また, 倍率は,

$m = \left|\dfrac{b}{a}\right| \cdot \left|\dfrac{b'}{a'}\right| = \left|\dfrac{2f}{2f}\right| \cdot \left|\dfrac{-f}{0.5f}\right| = 2$　であるので, 像の高さは $2x$　よって, $\mathrm{L_2}$ の 前方 f m の位置に高さ $2x$ m の虚像ができる。